

## 非线性微分-代数子系统的逆系统的构造

戴先中<sup>1</sup> 臧强<sup>1</sup> 张凯锋<sup>1</sup>

**摘要** 对于一类非线性微分-代数 (Differential-algebraic equation, DAE) 子系统, 将非线性常微分方程 (Ordinary differential equation, ODE) 系统的逆系统方法进行了完全扩展. 首先对此类非线性 DAE 子系统提出的物理背景和系统特性进行了详细阐述. 然后给出了非线性 DAE 子系统的逆系统定义, 包括单位右逆系统和  $\alpha$  阶积分右逆系统. 接下来提出一种递归算法, 利用此算法给出了被控系统可逆的充要条件, 并构造了物理可实现的控制器, 实现了非线性 DAE 子系统的线性化解耦. 最后基于本文所提出的控制方法, 研究了电力系统同步发电机组励磁汽门综合控制的线性化解耦问题.

**关键词** 微分-代数系统, 非线性系统, 子系统, 逆系统  
**中图分类号** TP13

### Construction of Inverse System for Nonlinear Differential-algebraic Equations Subsystems

DAI Xian-Zhong<sup>1</sup> ZANG Qiang<sup>1</sup> ZHANG Kai-Feng<sup>1</sup>

**Abstract** For a class of nonlinear differential-algebraic equation (DAE) subsystems, the method of inverse system for nonlinear ordinary differential equation (ODE) systems is expanded completely in this paper. At first, the background and the particularities of such systems are expatiated. Then, the definitions of inverse system (including unit right inverse system and  $\alpha$ -order right inverse system) are put forward. A recursive algorithm is given, based on which the sufficient and necessary conditions for the invertibility of the nonlinear DAE subsystems are presented. After that, a feasible controller design scheme is proposed to decouple and linearize the nonlinear DAE subsystems. At last, the linearization for excitation and valve coordinative control of one turbo-generator set within power systems is studied based on the control method presented in this paper.

**Key words** Differential-algebraic systems, nonlinear systems, subsystems, inverse system

许多物理系统如电力系统、经济系统以及受限机器人系统等都描述为微分-代数 (Differential-algebraic equation, DAE) 系统模型. 与通常的常微分方程 (Ordinary differential equation, ODE) 系统描述相比, DAE 形式的系统描述更具一般性. 目前线性 DAE 系统已经初步形成了与线性 ODE 系统相平行的理论体系<sup>[1]</sup>, 对于非线性 DAE 系统的研究近年来也取得了一定的进展. 文献 [2] 将非线性 ODE 系统的 Lyapunov 方法扩展到了非线性 DAE 系统, 给出了非线性 DAE 系统稳定的充分条件. 文献 [3] 将非线性 ODE 系统的受控不变分布概念引入到了非线性 DAE 系统. 文献 [4-5] 则将非线性 ODE 系统的微分几何方法进行了扩展, 提出了指数 1 条件下非线性 DAE 系统的精确反馈线性化方法.

在各种非线性控制方法中, 逆系统方法不需要

进行复杂的坐标变换, 过程简单明了, 物理意义清晰, 而且其适用于一般非线性系统 (有别于微分几何理论局限于仿射非线性系统的情形), 在系统的线性化、解耦等控制问题的研究中具有重要的地位<sup>[6-7]</sup>. 对于 DAE 系统可逆性的研究始于文献 [8-9], 分别讨论了连续和离散线性 DAE 系统的可逆性问题; 文献 [10] 研究了仿射非线性 DAE 系统的可逆性问题; 文献 [11] 则研究了一般非线性 DAE 系统的右可逆性问题.

然而已有结果大多将受控 DAE 系统作为孤立系统, 不考虑外部对于受控系统的影响, 但是在实际工程应用中, 更常见的却是如下的子系统控制问题: 被控对象是大系统中的一个非线性 DAE 子系统, 与大系统其余部分之间存在相互约束 (这些约束从物理角度考虑是自然产生的) 和影响. 典型的, 文献 [12] 为研究电力系统元件分散控制问题所提出的所谓“元件结构化模型”便属于这种情况. 为使读者对我们所谓“非线性 DAE 子系统”控制问题提出的物理背景有更为直观的了解, 下面对其作详细阐述.

对于包含  $N$  个元件的电力大系统, 其中第  $i$  个元件的结构化模型由如下的非线性微分-代数方程

收稿日期 2007-05-18 收修改稿日期 2008-12-22  
Received May 15, 2007; in revised form December 22, 2008  
国家自然科学基金 (50507002, 60174004, 59925718) 资助  
Supported by National Natural Science Foundation of China (50507002, 60174004, 59925718)  
1. 复杂工程系统测量与控制教育部重点实验室 (东南大学自动化学院) 南京 210096  
1. Key Laboratory of Measurement and Control of Complex Systems of Engineering (School of Automation, Southeast University), Ministry of Education, Nanjing 210096  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.01094

来描述:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{u}_i) \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_i, \hat{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (1)$$

文献 [12] 中称  $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^{X_i}$  为状态变量,  $\boldsymbol{u}_i \in \mathbf{R}^{U_i}$  为控制输入,  $\boldsymbol{w}_i \in \mathbf{R}^{W_i}$  为辅助变量,  $\hat{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbf{R}^{2m_i}$  为接口变量,  $\boldsymbol{f}_i \in \mathbf{R}^{X_i}$ ,  $\boldsymbol{g}_i \in \mathbf{R}^{W_i+2m_i}$  为光滑向量场. 显然元件  $i$  是电力大系统中的子系统, 相对于元件  $i$ , 其余的元件  $j$  ( $j \neq i$ ) 与交流电网  $\mathbf{0} = \boldsymbol{Z}(\hat{\boldsymbol{v}}_1, \bar{\boldsymbol{v}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{v}}_N, \bar{\boldsymbol{v}}_N) \in \mathbf{R}^{2(m_1+\dots+m_N)}$  自然地组成电力系统其余部分. 通过合适选取, 可使得  $\bar{\boldsymbol{v}}_i$  “完全” 反映电力系统其余部分对元件  $i$  的影响,  $\hat{\boldsymbol{v}}_i$  则 “完全” 反映元件  $i$  对于电力系统其余部分的影响.

在研究元件控制问题时, 通常还需要考虑它的控制输出, 其输出方程的一般形式为  $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{v}}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i)$  [12]. 若定义式 (1) 中的  $\boldsymbol{x}_i$  为微分变量,  $\boldsymbol{z}_i = (\boldsymbol{w}_i^T, \hat{\boldsymbol{v}}_i^T)^T$  为代数变量, 那么结构化模型 (1) 与输出方程一起, 共同组成了元件  $i$  完整的数学模型

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{u}_i) \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i) \\ \boldsymbol{y}_i &= \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2)$$

即 “非线性 DAE 子系统” 模型.

综上所述, 元件被控对象 (2) 就是电力大系统中的一个非线性 DAE 子系统 (有关元件结构化模型更详细的描述请参见文献 [12]). 不仅对于电力大系统, 对于其他领域的复杂大系统, 非线性 DAE 子系统的控制问题也是普遍存在的 [13]. 基于非线性 DAE 子系统模型来研究被控对象的控制问题, 更加符合实际控制情况和需要. 然而就作者所知, 目前对于非线性 DAE 子系统的研究还很少.

本文研究了一类非线性 DAE 子系统的逆系统的构造问题. 首先对此类非线性 DAE 子系统的系统特性进行了描述. 然后给出了非线性 DAE 子系统的逆系统定义, 包括单位右逆系统和  $\alpha$  阶积分右逆系统. 接下来提出了一种递归算法, 以此给出了非线性 DAE 子系统可逆的充要条件, 对可逆系统给出了物理可实现的控制器 (由状态反馈和动态补偿实现的  $\alpha$  阶积分右逆系统) 设计方案, 实现了非线性 DAE 子系统的线性化解耦. 需要指出的是, 与已有研究仅给出求逆算法不同, 本文还进一步给出了系统可逆的充要条件 (见定理 3). 最后基于本文所提出的控制方法, 研究了电力系统同步发电机组励磁汽门综合控制的线性化解耦问题.

## 1 系统的描述和问题的提出

考虑大系统中如下的非线性 DAE 子系统:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{u}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i) \\ \mathbf{0} &= \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{u}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i) \\ \boldsymbol{y}_i &= \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{u}_i, \bar{\boldsymbol{v}}_i), \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{N}_0^i \subset \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\boldsymbol{z}_i \in \mathbf{M}_0^i \subset \mathbf{R}^{l_i}$ ,  $\boldsymbol{u}_i \in \mathbf{L}_0^i \subset \mathbf{R}^{m_i}$ ,  $\boldsymbol{y}_i \in \mathbf{K}_0^i \subset \mathbf{R}^{m_i}$  分别为微分变量、代数变量、控制输入和控制输出, 称  $\bar{\boldsymbol{v}}_i \in \mathbf{S}_0^i \subset \mathbf{R}^{s_i}$  为大系统其余部分对于子系统 (3) 的关联输入变量, 反映了大系统其余部分对于系统 (3) 的影响.  $\boldsymbol{f}_i \in \mathbf{R}^{n_i}$ ,  $\boldsymbol{g}_i \in \mathbf{R}^{l_i}$ ,  $\boldsymbol{h}_i \in \mathbf{R}^{m_i}$  均为定义域上的光滑向量场. 为简便起见, 下文将省略下标  $i$ . 与系统 (2) 相比, 显然系统 (3) 更具一般性.

对非线性 DAE 子系统 (3), 我们有如下假设:

**假设 1.** 非线性 DAE 子系统 (3) 是指数 1 的, 即代数方程  $\mathbf{0} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}})$  关于代数变量  $\boldsymbol{z}$  的雅可比矩阵在  $\mathbf{U}_0$  上具有常满秩:

$$\text{rank}\left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{z}}\right) = l, \quad \forall (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}, \bar{\boldsymbol{v}}) \in \mathbf{U}_0 \quad (4)$$

这里  $\mathbf{U}_0 = [\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{L}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{S}_0]$ .

**假设 2.** 非线性 DAE 子系统 (3) 具有容许初始值  $\boldsymbol{X}_0 = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{y}_0, \bar{\boldsymbol{v}}_0) \in \mathbf{U}_0$  [2, 5], 即  $\mathbf{0} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{u}_0, \bar{\boldsymbol{v}}_0)$ .

假设 1 和 2 保证了非线性 DAE 子系统 (3) 的解对容许初始值的存在和唯一性 [2].

**假设 3.** 关联输入变量  $\bar{\boldsymbol{v}}$  及其充分阶次的导数均为本地可测有界信号.

本文将研究满足以上假设的非线性 DAE 子系统 (3) 的逆系统的构造问题, 从而实现被控系统的线性化解耦.

**注 1.** 假设 1 ~ 3 对于正常运行工况下的电力系统元件被控对象是成立的 [12], 这正是我们研究的出发点.

**注 2.** 与已有孤立非线性 DAE 系统结果相比, 系统 (3) 中的微分方程和代数方程还含有关联输入变量  $\bar{\boldsymbol{v}}$ , 这使得类似于文献 [4-5] 中的精确反馈线性化方法不可行. 同时系统 (3) 中的关联输入变量具有假设 3 所述的优良性质, 这为其控制器的设计提供了极大的便利.

**注 3.** 由式 (4) 和隐函数定理可知, 代数方程  $\mathbf{0} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}})$  可唯一确定光滑映射  $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}}) : \mathbf{R}^{n+m+s} \rightarrow \mathbf{R}^l$ , 使得  $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}})$ . 若我们能够得到解析表达式, 那么将  $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{v}})$  代入系统 (3)

中, 将使得系统 (3) 转化为非线性 ODE 子系统

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}), \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}), \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{h}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})\end{aligned}\quad (5)$$

此时可以利用已有的非线性 ODE 系统的逆系统控制方法 (并结合子系统的特点加以适当改进) 来研究系统 (3) 的控制问题. 然而由于代数方程  $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$  一般是非线性的,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$  的解析表达式往往很难获得, 因而在非线性 DAE 子系统框架下研究系统 (3) 的逆系统控制方法具有重大意义, 这也正是本文的主要工作.

类似于非线性 ODE 系统的逆系统定义<sup>[6-7]</sup>, 接下来我们将给出非线性 DAE 子系统 (3) 的逆系统定义, 包括单位右逆系统和  $\alpha$  阶积分右逆系统, 并对其控制原理进行简单描述.

## 2 非线性 DAE 子系统的逆系统定义

非线性 DAE 子系统 (3) 受大系统其余部分产生的关联输入变量  $\bar{\mathbf{v}}$  的影响, 关联输入变量  $\bar{\mathbf{v}}$ 、控制输入  $\mathbf{u}$  和初始状态  $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$  一起决定着非线性 DAE 子系统 (3) 的控制输出  $\mathbf{y}$ , 这有别于孤立系统的输出仅由其初始状态和控制输入决定的情形. 而从泛函的观点来看, 非线性 DAE 子系统 (3) 相当于一个由输入  $\mathbf{u}(t)$  和关联输入变量  $\bar{\mathbf{v}}$  映射到输出  $\mathbf{y}(t)$  的算子, 记为  $\theta$ , 即

$$\mathbf{y} = \theta(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) \quad (6)$$

下面首先给出非线性 DAE 子系统 (3) 的单位右逆系统的定义.

**定义 1.** 对于非线性 DAE 子系统 (3), 若存在系统  $\bar{\Sigma}$  具有映射关系:  $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\theta}(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{v}})$ , 其输入  $\mathbf{r}(t) = (r_1, \dots, r_m)^T$  为满足一定初始条件的充分光滑函数向量, 当  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t)$  时, 有  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(t)$ , 则称系统  $\bar{\Sigma}$  是非线性 DAE 子系统 (3) 的一个单位右逆系统, 称非线性 DAE 子系统 (3) 是可逆的.

直观地讲, 若非线性 DAE 子系统 (3) 存在单位右逆系统  $\bar{\Sigma}$ , 那么把非线性 DAE 子系统 (3) 的期望输出  $\mathbf{r}(t)$  作为单位右逆系统的输入, 那么  $\bar{\Sigma}$  的输出正是用来驱动非线性 DAE 子系统 (3) 产生期望输出  $\mathbf{r}(t)$  所需要的控制量. 将单位右逆系统  $\bar{\Sigma}$  串联在非线性 DAE 子系统 (3) 之前, 则复合系统的输入输出关系满足:  $\mathbf{y} = \mathbf{r}$ . 接下来给出非线性 DAE 子系统 (3) 的  $\alpha$  阶积分右逆系统定义.

**定义 2.** 对于非线性 DAE 子系统 (3), 若存在系统  $\bar{\Sigma}_\alpha$  具有映射关系:  $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\theta}_\alpha(\boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{v}})$ , 其输入  $\boldsymbol{\varphi}(t) = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T$  为满足一定初始条件的连续函数向量. 若取  $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{r}^{(\alpha)} = (r_1^{(\alpha_1)}, \dots, r_m^{(\alpha_m)})$ , 当  $\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t)$  时, 有  $\mathbf{y}^{(\alpha)} = \boldsymbol{\varphi}$ , 这里  $\mathbf{y}^{(\alpha)} = (y_1^{(\alpha_1)}, \dots, y_m^{(\alpha_m)})$

(即  $y_i^{(\alpha_i)} = \varphi_i, i = 1, \dots, m$ ), 则称系统  $\bar{\Sigma}_\alpha$  是非线性 DAE 子系统 (3) 的一个  $\alpha$  阶积分右逆系统, 这里  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , 此时也称非线性 DAE 子系统 (3) 是可逆的.

由定义 2 可见, 将  $\alpha$  阶积分右逆系统串联在非线性 DAE 子系统 (3) 之前, 将把系统 (3) 补偿成标准的积分型解耦系统:  $y_i^{(\alpha_i)} = \varphi_i$ .

与文献 [6-7] 中孤立系统的逆系统定义相比较, 非线性 DAE 子系统 (3) 的逆系统输入中还包含关联输入变量  $\bar{\mathbf{v}}$ , 这正体现了 (3) 的子系统特性.

## 3 递归算法

类似于文献 [11], 下面我们给出一种递归算法, 以此来推导出非线性 DAE 子系统 (3) 的可逆性条件.

由式 (4) 可知在  $\mathbf{U}_0$  上  $\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1}$  存在. 首先引入算子

$$E_\xi(\mathbf{F}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} \Big|_{\mathbf{0}=\mathbf{g}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{z}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \xi} \quad (7)$$

表示函数  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}, \bar{\mathbf{v}}, \dots, \bar{\mathbf{v}}^{(k)})$  在约束  $\mathbf{0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$  下对变量  $\xi$  的偏导, 其中  $\xi$  为  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}$  中的某一个变量. 限于篇幅, 下面仅给出算法第  $k$  步的步骤.

第  $k$  ( $k = 1, \dots$ ) 步: 设直到第  $k$  步, 得到一列整数  $\gamma_0, \dots, \gamma_{k-2}, \gamma_{k-1}$ , 且  $\mathbf{X}_0^{k-1}$  为  $\Delta_{k-1}$  的正则点, 在  $\mathbf{X}_0^{k-1}$  附近有  $\text{rank}[E_u \mathbf{h}_{k-1}] =$

$\gamma_{k-1}$ , 这里  $\mathbf{h}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{k-2} \\ \hat{\mathbf{h}}_{k-1} \end{bmatrix}$ . 显然  $\gamma_{k-1} \geq$

$\gamma_{k-2}$ , 故可以从  $\hat{\mathbf{h}}_{k-1}$  中选出  $\gamma_{k-1} - \gamma_{k-2}$  行,

记为  $\hat{\mathbf{h}}_{k-1,1}$ , 使得  $\text{rank} \begin{bmatrix} E_u(\mathbf{H}^{k-2}) \\ E_u(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,1}) \end{bmatrix} = \gamma_{k-1}$ ,

即  $\begin{bmatrix} E_u(\mathbf{H}^{k-2}) \\ E_u(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,1}) \end{bmatrix}$  的各行构成分布  $\Delta_{k-1}$  的一

组基底. 记  $\mathbf{H}_{k-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{k-2} \\ \hat{\mathbf{h}}_{k-1,1} \end{bmatrix}$ , 将  $\hat{\mathbf{h}}_{k-1}$  其

余的各行记为  $\hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}$ , 则存在  $\mathbf{X}_0^{k-1}$  的邻域  $\bar{\mathbf{U}}_k = [\mathbf{N}_k, \mathbf{M}_k, \mathbf{L}_k, \bar{\mathbf{K}}_k, \bar{\mathbf{S}}_k] \subseteq \mathbf{U}_{k-1}$  和光滑映射  $\lambda_{k-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k-1)}, \bar{\mathbf{v}}, \dots, \bar{\mathbf{v}}^{(k-1)})$ , 使得

$$E_u(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}) = \lambda_{k-1}(\cdot) E_u(\mathbf{H}_{k-1}) \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_k &= \{ \mathbf{x} | \mathbf{x} \in \mathbf{N}_{k-1}, \text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_{k-1})) = \gamma_{k-1} \} \\ \mathbf{M}_k &= \{ \mathbf{z} | \mathbf{z} \in \mathbf{M}_{k-1}, \text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_{k-1})) = \gamma_{k-1} \} \\ \mathbf{L}_k &= \{ \mathbf{u} | \mathbf{u} \in \mathbf{L}_{k-1}, \text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_{k-1})) = \gamma_{k-1} \} \quad (9) \\ \bar{\mathbf{K}}_k &= \{ \mathbf{Y}_{k-1} | \mathbf{Y}_{k-1} \in \mathbf{K}_{k-1}, \\ &\quad \text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_{k-1})) = \gamma_{k-1} \} \\ \bar{\mathbf{S}}_k &= \{ \bar{\mathbf{v}}_{k-1} | \bar{\mathbf{v}}_{k-1} \in \mathbf{S}_{k-1}, \\ &\quad \text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_{k-1})) = \gamma_{k-1} \} \end{aligned}$$

这里定义  $\mathbf{Y}_{k-1} = (\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k-1)})$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_{k-1} = (\bar{\mathbf{v}}, \dots, \bar{\mathbf{v}}^{(k-1)})$ . 若此时  $E_{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}) = \mathbf{0}$ , 则选取式 (8) 中的  $\lambda_{k-1}(\cdot) = 0$  即可. 记

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_k &= \hat{\mathbf{h}}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = \\ &\left[ E_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}) - \lambda_{k-1}(\cdot) E_{\mathbf{x}}(\mathbf{H}_{k-1}) \right] \dot{\mathbf{x}} + \\ &\sum_{i=0}^{k-1} \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} - \lambda_{k-1}(\cdot) \frac{\partial \mathbf{H}_{k-1}}{\partial \mathbf{y}^{(i)}} \right] \mathbf{y}^{(i+1)} + \quad (10) \\ &\left[ E_{\bar{\mathbf{v}}}(\hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}) - \lambda_{k-1}(\cdot) E_{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{H}_{k-1}) \right] \dot{\bar{\mathbf{v}}} + \\ &\sum_{i=1}^{k-1} \left[ \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_{k-1,2}}{\partial \bar{\mathbf{v}}^{(i)}} - \lambda_{k-1}(\cdot) \frac{\partial \mathbf{H}_{k-1}}{\partial \bar{\mathbf{v}}^{(i)}} \right] \bar{\mathbf{v}}^{(i+1)} \end{aligned}$$

同时递归地定义

$$\mathbf{h}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{k-1} \\ \hat{\mathbf{h}}_k \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (11)$$

记  $\mathbf{U}_k = [\mathbf{N}_k, \mathbf{M}_k, \mathbf{L}_k, \mathbf{K}_k, \mathbf{S}_k]$ ,  $\mathbf{K}_k = [\bar{\mathbf{K}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k]$ ,  $\mathbf{S}_k = [\bar{\mathbf{S}}_k, \hat{\mathbf{S}}_k]$ , 而  $\bar{\mathbf{K}}_k, \hat{\mathbf{K}}_k$  分别为  $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_{k-1}$ ,  $\mathbf{z} \in \mathbf{M}_{k-1}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_{k-1}$ ,  $\mathbf{Y}_{k-1} \in \bar{\mathbf{K}}_{k-1}$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_{k-1} \in \bar{\mathbf{S}}_{k-1}$  时,  $\mathbf{y}^{(k)}$  和  $\bar{\mathbf{v}}^{(k)}$  所对应的值域. 将  $E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_k)$  的各行张成的分布记为  $\Delta_k$ , 此时相应地得到点  $\mathbf{X}_0^k = (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{Y}_k^0, \bar{\mathbf{v}}_k^0)$ , 这里  $\mathbf{Y}_k^0 = (\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_0^{(k)})$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_k^0 = (\bar{\mathbf{v}}_0, \dots, \bar{\mathbf{v}}_0^{(k)})$ , 若  $\mathbf{X}_0^k$  为  $\Delta_k$  的正则点, 即矩阵  $E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_k)$  在  $\mathbf{X}_0^k$  的某个邻域内具有常秩  $\gamma_k$ . 若  $\gamma_k = m$ , 算法停止; 若  $\gamma_k < m$ , 则算法进入下一步.

算法产生了一系列非负整数  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  满足  $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \leq m$ , 下面给出非线性 DAE 子系统 (3) 的相对阶定义.

**定义 3.** 称使得  $\gamma_k = m$  的最小整数  $k$  为非线性 DAE 子系统 (3) 的相对阶, 记为  $\alpha$ , 称满足算法每一步正则性要求的  $\mathbf{X}_0$  为算法的正则点. 若不存在任何有限整数  $k$  使得  $\gamma_k = m$ , 则称  $\alpha = \infty$ .

#### 4 非线性 DAE 子系统的可逆性

有了以上递归算法和相对阶定义, 对非线性 DAE 子系统 (3) 的可逆性有以下结论.

**定理 1.** 若非线性 DAE 子系统 (3) 存在有限相对阶  $\alpha$ , 则系统 (3) 是可逆的, 其单位右逆系统存在.

**证明.** 证明是构造性的. 由递归算法, 在第  $\alpha$  步可以得到  $\mathbf{X}_0$  的一个邻域和如下的方程

$$\mathbf{h}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{Y}_\alpha, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) = \mathbf{0} \quad (12)$$

其中  $\mathbf{h}_\alpha$  在此邻域上满足  $\text{rank}(E_{\mathbf{u}}(\mathbf{h}_\alpha)) = \gamma_\alpha = m$ . 由隐函数定理, 式 (12) 存在关于控制输入  $\mathbf{u}$  的解

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{Y}_\alpha, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \quad (13)$$

构造如下系统

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha), \bar{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha), \bar{\mathbf{v}}) \quad (14) \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \end{aligned}$$

其中  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ ,  $\bar{\mathbf{z}} \in \mathbf{R}^l$ ,  $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^m$  和  $\bar{\mathbf{y}} \in \mathbf{R}^m$  分别是系统 (14) 的微分变量, 代数变量, 控制输入和控制输出. 系统 (14) 是子系统 (3) 的一个单位右逆系统, 结论的证明与文献 [7] 引理 4.4.2 的类似, 这里省略.  $\square$

注意到单位右逆系统 (14) 中含有微分环节, 这在物理上是难以实现的. 而在一定的初始条件下, 单位右逆系统可以转化为  $\alpha$  阶积分右逆系统, 而  $\alpha$  阶积分右逆系统是物理可实现的<sup>[7]</sup>. 为此将式 (13) 中的  $\mathbf{y}$  替换为  $\mathbf{r}$  得

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}, \dots, \bar{\mathbf{v}}^{(\alpha)}) \quad (15)$$

设  $r_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 的最低阶和最高阶导数分别是  $r_i^{(\beta_i)}$  和  $r_i^{(\alpha_i)}$ . 定义

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T = (r_1^{(\alpha_1)}, \dots, r_m^{(\alpha_m)})^T \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\xi}_i = (r_i^{(\beta_i)}, r_i^{(\beta_i+1)}, \dots, r_i^{(\alpha_i-1)})^T, i = 1, \dots, m$$

构造如下系统  $\bar{\Sigma}_\alpha$ :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}_i &= \mathbf{A}_i \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\varphi}_i, i = 1, \dots, m \\ \bar{\mathbf{y}} &= \mathbf{h}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\varphi}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_{(\alpha_i - \beta_i) \times (\alpha_i - \beta_i)}$$

$$\mathbf{B}_i = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbf{R}^{(\alpha_i - \beta_i)}$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\boldsymbol{\xi}_1^T, \dots, \boldsymbol{\xi}_m^T)^T, \bar{\mathbf{v}}_\alpha = (\bar{\mathbf{v}}^T, \dots, (\bar{\mathbf{v}}^{(\alpha)})^T)^T$$

我们有如下结论:

**定理 2.** 若非线性 DAE 子系统 (3) 存在相对阶  $\alpha$ , 则系统 (17) 是非线性 DAE 子系统 (3) 的一个  $\alpha$  阶积分右逆系统.

**证明.** 若系统 (17) 中的  $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{C}^\alpha(\mathbf{R})$  满足  $\mathbf{h}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) = \mathbf{0}$ , 对  $k = 1, \dots, \alpha - 1$  有

$$\mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(k)}, \bar{\mathbf{v}}_k) = \mathbf{H}_k(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) \quad (18)$$

成立, 且初始条件满足

$$\hat{\mathbf{h}}_{k,2}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{z}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \mathbf{r}(t_0), \dots, \mathbf{r}^{(k)}(t_0), \bar{\mathbf{v}}_k(t_0)) = \hat{\mathbf{h}}_{k,2}(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{z}(t_0), \mathbf{u}(t_0), \mathbf{Y}_k(t_0), \bar{\mathbf{v}}_k(t_0)) \quad (19)$$

那么把系统 (17) 串联在系统 (3) 之前, 当取  $\boldsymbol{\varphi} = (r_1^{(\alpha_1)}, \dots, r_m^{(\alpha_m)})^T$ ,  $\boldsymbol{\xi}_i(t_0) = (r_i^{(\beta_i)}(t_0), \dots, r_i^{(\alpha_i-1)}(t_0))^T$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 时, 将使得系统 (3) 的输出满足  $\mathbf{y}_i^{(\alpha_i)}(t) = \varphi_i(t), i = 1, \dots, m$  (这里  $\boldsymbol{\varphi}$  为新的待设计的控制输入), 由定义 2, 系统 (17) 是系统 (3) 的一个由状态反馈和动态补偿实现的  $\alpha$  阶积分右逆系统.  $\square$

**注 4.** 系统 (14) 和 (17) 已经实现了非线性 DAE 子系统 (3) 的线性化和解耦, 此时可以进一步按照线性控制理论的各种已有方法进行综合.

**注 5.** 隐函数定理仅仅保证了系统 (14) 和 (17) 的存在性. 在某些较为简单的情况下, 能够得到控制  $\mathbf{u}$  的解析表达式, 使得系统 (14) 和 (17) 可以实现. 但对于某些复杂情况, 可能无法得到控制的解析表达式, 我们对此问题已经有了一些初步的解决思路, 如: 可利用文献 [6] 中的方法, 借助于神经网络良好的逼近能力, 将系统 (14) 和 (17) 近似实现; 也可以借鉴文献 [11] 中的思路, 利用动态扩张的方法, 将系统 (14) 和 (17) 解析实现等.

注意到定理 1 和定理 2 只是给出了非线性 DAE 子系统 (3) 可逆的充分条件. 接下来我们给出一个重要的结论, 指出非线性 DAE 子系统 (3) 可逆时的充要条件. 在此之前, 我们先给出一个有用的引理.

**引理 1.** 若非线性 DAE 子系统 (3) 是可逆的, 则对于任意给定的  $k = 0, \dots, \alpha - 1$ , 存在  $\mathbf{N}_k \subset \mathbf{R}^n$  和  $\mathbf{K}_{k+1} \subset \mathbf{R}^{m \times (k+1)}$ , 当  $\mathbf{x} \in \mathbf{N}_k, [\mathbf{y}, \dots, \mathbf{y}^{(k)}] \in \mathbf{K}_{k+1}$  时有下式成立:

$$\text{rank} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{k,2} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{k,2} \end{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right\} = \sum_{i=0}^k (m - \gamma_i) \quad (20)$$

**证明.** 只需要注意到代数变量  $\mathbf{z}$  是“受限”于微分变量  $\mathbf{x}$  和关联输入变量  $\bar{\mathbf{v}}$  的, 并不是真正意义上独立的变量. 在指数 1 和容许初始条件的前提下, 有  $\mathbf{z} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$  且其初始条件满足  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{p}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \bar{\mathbf{v}}_0)$ . 其余的证明与文献 [7] 引理 4.4.4 的类似.  $\square$

**定理 3.** 非线性 DAE 子系统 (3) 可逆的充分必要条件是其相对阶  $\alpha = n$ .

**证明.** 记  $\hat{\mathbf{h}}_{i,2}^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = \hat{\mathbf{h}}_{i,2}(\mathbf{x}, \mathbf{p}(\cdot), \mathbf{u}, \mathbf{Y}_k, \bar{\mathbf{v}}_k)$ , 容易看出对  $i = 0, \dots, \alpha - 1$  有

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_{i,2}^*}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_{i,2}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}_{i,2}}{\partial \mathbf{z}} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (21)$$

成立, 即

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2} \end{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2}^* \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2}^* \end{bmatrix} \quad (22)$$

**充分性.** 当  $\alpha \leq n$  时, 构造系统 (14), 若系统 (14) 的输入  $\mathbf{r}$  满足  $\mathbf{r}^{(i)}(t_0) = \mathbf{y}^{(i)}(t_0) (i = 0, \dots, \alpha - 1)$ ,  $\mathbf{h}_\alpha(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{y}}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r}^{(\alpha)}, \bar{\mathbf{v}}_\alpha) = \mathbf{0}$ . 当  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{y}}$  时, 因为系统 (14) 的初始状态与系统 (3) 的初始状态相同, 因而有  $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{z}}) = (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ . 而系统 (3) 的输出  $\mathbf{y}^{(i)}(t_0)$  满足求逆算法中产生的  $\hat{\mathbf{h}}_{i,2}$ , 因而定理 1 中的条件满足, 系统 (14) 即为系统 (3) 的单位右逆系统. 充分性得证.

**必要性.** 采用反证法来证明. 设  $\alpha > n$ , 由求逆算法可知

$$m - \gamma_i \geq 1, i = 0, \dots, \alpha - 1 \quad (23)$$

由引理 1 可得

$$\text{rank} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2} \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2} \end{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right\} = \sum_{i=0}^{\alpha-1} (m - \gamma_i) \geq \sum_{i=0}^{\alpha-1} 1 = \alpha \geq n + 1 \quad (24)$$

由于  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ , 我们总有  $\text{rank} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{h}}_{0,2}^* \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{h}}_{\alpha-1,2}^* \end{bmatrix} \right\} \leq n$ , 而式 (22) 和 (24) 显然矛盾, 因而假设不成立. 必要性得证.  $\square$

定理 3 表明了当非线性 DAE 子系统 (3) 可逆时, 其相对阶  $\alpha$  与微分变量  $\mathbf{x}$  的维数  $n$  之间的关系.

## 5 同步发电机励磁汽门综合控制设计例

电力系统的元件分散控制问题是我们研究的出发点, 下面基于本文所提出的方法, 研究电力系统同步发电机组励磁汽门综合控制的线性化解耦问题. 为简便起见, 省略了下标  $i$ .

同步发电机组励磁汽门综合控制模型描述为如下的双输入双输出非线性 DAE 子系统<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= f_1 = \omega - \omega_0 \\ \dot{\omega} &= f_2 = \frac{\omega_0}{H} \{P_H + C_{ML} P_{m0} - \\ &\quad \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) - [E'_q + (x_q - x'_d) I_d] I_q\} \\ \dot{E}'_q &= f_3 = \frac{1}{T'_{d0}} [E_f - E'_q - (x_q - x'_d) I_d] \\ \dot{P}_H &= f_4 = \frac{1}{T_{H\Sigma}} (-P_H + C_H P_{m0} + C_H U_c) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} P_t - [E'_q + (x_q - x'_d) I_d] I_q + r_a (I_d^2 + I_q^2) \\ \theta_U - \delta + \text{arccctg} \frac{x_q I_q - r_a I_d}{E'_q - x'_d I_d - r_a I_q} \\ I_t - \sqrt{I_d^2 + I_q^2} \\ Q_t - E'_q I_d + x_q I_q^2 + x'_d I_d^2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

微分变量  $\mathbf{x} = (\delta, \omega, E'_q, P_H)^T$ , 分别为同步发电机的功角、发电机转子转速、 $q$  轴暂态电势和汽轮机高压缸输出功率, 选取代数变量  $\mathbf{z} = (P_t, \theta_U, I_d, I_q)^T$ , 分别为发电机有功、发电机母线电压相角和机端电压的  $d$  轴、 $q$  轴分量, 关联输入变量选取为  $\bar{\mathbf{v}} = (I_t, Q_t)^T$ , 分别为发电机定子电流和发电机无功. 在发电机正常运行范围内,  $I_t, Q_t$  以及  $\dot{I}_t, \dot{Q}_t$  都是本地有界可测的. 控制输入  $\mathbf{u} = (E_f, U_c)^T$ , 分别为励磁电动势和汽门开度, 其余的为系统参数. 控制输出选取为机端电压与发电机转子转速

$$\mathbf{h}(\cdot) = \begin{pmatrix} V_t \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} \\ I_t \\ \omega \end{pmatrix} \quad (27)$$

代数方程  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \bar{\mathbf{v}})$  对于代数变量  $\mathbf{z}$  的偏导数矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad (28)$$

这里  $a_{13} = (x_q - x'_d) I_q + 2r_a I_d$ ,  $a_{14} = (x_q - x'_d) I_d + 2r_a I_q$ ,  $a_{23} = \frac{-1}{1+A^2} \frac{\partial A}{\partial I_d}$ ,  $a_{24} = \frac{-1}{1+A^2} \frac{\partial A}{\partial I_q}$ ,  $a_{33} = \frac{I_d}{I_t}$ ,  $a_{34} = -\frac{I_q}{I_t}$ ,  $a_{43} = -E'_q + 2x'_d I_d$ ,  $a_{44} = 2x_q I_q$ , 而  $A = \frac{x_q I_q - r_a I_d}{E'_q - x'_d I_d - r_a I_q}$ .

容易验证, 在发电机正常运行范围之内  $\det \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right) = -\frac{1}{I_t} (2x_q I_d I_q + E'_q I_q - 2x'_d I_d I_q) \neq 0$ , 即  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}}$  是常满秩的, 非线性 DAE 子系统 (24) 满足指数 1 条件.

由式 (25) 和 (26) 计算可得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{z}} \right)^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & -a_{33}^{-1} a_{43} & 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_q & 0 \\ -1 & 0 & \frac{-1}{1+A^2} \frac{\partial A}{\partial E'_q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_d & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \bar{\mathbf{v}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

其中,  $b_1 = -a_{33}^{-1} a_{13} - a_{33}^{-1} a_{43} c_1$ ,  $b_2 = -a_{33}^{-1} a_{23} - a_{33}^{-1} a_{43} c_2$ ,  $b_3 = 1 - a_{33}^{-1} a_{43} c_3$ ,  $c_1 = -c_4^{-1} a_{14} + a_{33}^{-1} c_4^{-1} a_{13} a_{34}$ ,  $c_2 = -c_4^{-1} a_{24} + a_{33}^{-1} c_4^{-1} a_{23} a_{34}$ ,  $c_3 = c_4^{-1} a_{33}$ ,  $c_4 = a_{44} - a_{33}^{-1} a_{34} a_{43}$ . 接下来按照本文提出的递归算法来验证同步发电机组的可逆性. 限于篇幅, 这里不再给出详细的推导步骤. 由递归算法可以验证同步发电机组可逆, 其相对阶为 2, 两个输出  $y_1, y_2$  的最高阶导数分别是 1 阶和 2 阶. 控制  $u$  的显式解为

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{T'_{d0}}{-I_q - c_1 I_d} \left\{ \frac{1}{P_t} \left[ \frac{1}{I_t} \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (I_t^2 \dot{y}_1 + \dot{I}_t \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}) - Q_t \dot{Q}_t \right] + \right. \\ &\quad \left. b_1 \dot{I}_t + c_1 \dot{Q}_t \right\} + E'_q + (x_d - x'_d) I_d \\ U_c &= \frac{\omega_0 C_H}{HT_{H\Sigma}} \{ \ddot{y}_2 - \frac{\omega_0}{HT_{H\Sigma}} (-P_H + C_H P_{m0}) - \\ &\quad \frac{D}{\omega_0} f_2 - I_q f_3 - (x_q - x'_d) c_3 I_d I_q f_3 + \\ &\quad (x_q - x'_d) b_3 I_q \dot{I}_t + (x_q - x'_d) c_3 I_q \dot{Q}_t - \\ &\quad E'_q I_d f_3 + a_{33}^{-1} a_{43} E'_q \dot{I}_t + E'_q \dot{Q}_t - \\ &\quad (x_q - x'_d) I_d^2 f_3 + a_{33}^{-1} a_{43} (x_q - x'_d) I_d \dot{I}_t + \\ &\quad (x_q - x'_d) I_d \dot{Q}_t \} \end{aligned} \quad (30)$$

进而可由式 (17) 和 (30) 构造出同步发电机组的 (1, 2) 阶积分右逆系统, 实现其输入输出线性化解耦.

## 6 结论和展望

本文将非线性 ODE 系统的逆系统方法完全扩展到了非线性 DAE 子系统, 研究了此类系统的逆系统构造问题. 首先提出了此类非线性 DAE 子系统的逆系统定义, 给出了递归算法和判断系统是否可逆的充分必要条件, 对可逆的受控系统给出了物理可实现的控制器设计方案, 实现了非线性 DAE 子系统的线性化解耦. 不同于通常研究仅仅给出求逆算法, 本文不仅给出了构造性的求逆算法, 还进一步给出了系统可逆的充要条件 (定理 3), 从而为此类子系统的逆系统控制方法打下了坚实的理论基础. 对复杂 DAE 大系统而言, 子系统的控制问题是普遍存在的. 电力系统分散控制是本文研究的出发点, 但本文的结果对于其他领域复杂 DAE 大系统的分散控制问题也具有借鉴意义.

本文所提出的逆系统控制方法实现了被控系统在输入输出关系上的线性化和解耦, 对于系统内部的稳定性问题则没有涉及. 初步研究表明, 对于某些实际系统如电力系统的元件, 在应用本文的逆系统控制方法时, 即使被控系统存在零动态, 闭环系统也是稳定的. 不论是非线性 ODE 系统还是非线性 DAE 系统, 逆系统控制方法的稳定性问题一直是研究的热点. 更一般意义下的此类非线性 DAE 子系统的稳定性问题, 还有待于进一步的研究.

## References

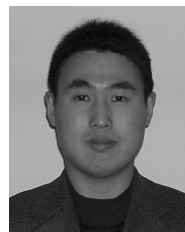
- Campbell S L, Nichols N K, Terrell W J. Duality, observability, and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circuits, Systems, and Signal Process*, 1991, **10**(4): 455–470
- Hill D J, Mareels I M Y. Stability theory for differential/algebraic systems with application to power systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1990, **37**(11): 1416–1423
- Wang Wen-Tao, Liu Xiao-Ping, Zhao Jun. Controlled invariant distributions of nonlinear singular systems and their invariant properties. *Acta Automatica Sinica*, 2004, **30**(6): 911–919  
(王文涛, 刘晓平, 赵军. 非线性奇异系统的受控不变分布及其不变性. *自动化学报*, 2004, **30**(6): 911–919)
- Wang J, Chen C. Exact linearization of nonlinear differential algebraic systems. In: *Proceedings of International Conference on Info-Tech and Info-Net*. Beijing, China: IEEE, 2001. 284–290
- Wang Jie, Chen Chen. Nonlinear control of differential algebraic model in power systems. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2001, **21**(8): 15–18  
(王杰, 陈陈. 电力系统中微分代数模型的非线性控制. *中国电机工程学报*, 2001, **21**(8): 15–18)
- Dai Xian-Zhong. *The ANN Inverse Control Method of Multivariable Nonlinear Systems*. Beijing: Science Press, 2005

(戴先中. 多变量非线性系统的神经网络逆控制方法. 北京: 科学出版社, 2005)

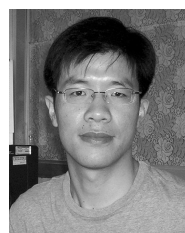
- Li Chun-Wen, Feng Yuan-Kun. *The Inverse Systems Method of Multi-Variable Nonlinear Control*. Beijing: Tsinghua University Press, 1991  
(李春文, 冯元琨. 多变量非线性控制的逆系统方法. 北京: 清华大学出版社, 1991)
- Tan S H, Vandewalle J. Inversion of singular systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1998, **35**(5): 583–587
- EI-Tohami M, Lovass-Nagy V, Powers D L. On minimal-order inverses of discrete-time descriptor systems. *International Journal of Control*, 1985, **41**(4): 991–1004
- Wang Jing, Liu Xiao-Ping. The invertibility of affine nonlinear singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 1998, **24**(2): 254–257  
(王晶, 刘晓平. 仿射非线性奇异系统的可逆性. *自动化学报*, 1998, **24**(2): 254–257)
- Wu Re-Bing, Li Chun-Wen, Liu Yan-Hong. Right invertibility of nonlinear singular systems. *Acta Automatica Sinica*, 2003, **29**(6): 927–931  
(吴热冰, 李春文, 刘艳红. 非线性广义系统的右可逆性. *自动化学报*, 2003, **29**(6): 927–931)
- Dai Xian-Zhong, Zhang Kai-Feng. Interface concept and structural model of complex power systems. *Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2007, **27**(7): 7–12  
(戴先中, 张凯锋. 复杂电力系统的接口概念与结构化模型. *中国电机工程学报*, 2007, **27**(7): 7–12)
- Frye M T, Lu Y L, Qian C J. Decentralized output feedback control of large-scale nonlinear systems interconnected by unmeasurable states. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Boston, USA: IEEE, 2004. 4267–4272



戴先中 东南大学自动化学院教授. 主要研究方向为非线性控制, 电力系统控制. E-mail: xzdai@seu.edu.cn  
(DAI Xian-Zhong Professor at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear systems control and power systems control.)



臧强 东南大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性控制. 本文通信作者. E-mail: qzang@seu.edu.cn  
(ZANG Qiang Ph.D. candidate at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers nonlinear control. Corresponding author of this paper.)



张凯锋 东南大学自动化学院副研究员, 博士. 主要研究方向为电力系统控制. E-mail: kaifengzhang@seu.edu.cn  
(ZHANG Kai-Feng Associate professor, Ph.D. at the School of Automation, Southeast University. His research interest covers power systems control.)