

# 基于基波频率估计的多谐波分析

储昭碧<sup>1</sup> 张崇巍<sup>1</sup> 冯小英<sup>1</sup>

**摘要** 采用自适应陷波滤波器实现基波频率可变的多谐波(包含整数次谐波和非整数次间谐波)分析. 算法包括基波频率估计器和多个二维正弦跟踪器, 形成缓慢自适应积分流形, 用李雅普诺夫定理和平均方法证明积分流形的存在性和稳定性. 若滤波器频率系数和信号的谐波结构相同, 该自适应陷波滤波器是一致渐近稳定的, 可按指数收敛准确跟随基波频率、每个谐波(间谐波)及其幅值. 导出了频率特性表达式和频率特性矩阵, 分析了滤波器参数对稳态频率特性的影响. 通过仿真验证算法的有效性, 并说明减小滤波器带宽参数和自适应增益能够获得更好的噪声特性.

**关键词** 自适应陷波滤波器, 基波频率估计, 稳定性分析, 积分流形, 多谐波分析  
**中图分类号** TP14

## Multi-harmonics Analysis Based on Fundamental Frequency Estimate

CHU Zhao-Bi<sup>1</sup> ZHANG Chong-Wei<sup>1</sup> FENG Xiao-Ying<sup>1</sup>

**Abstract** An adaptive notch filter is presented to analyze integral and fractional harmonics of variable fundamental frequency. The algorithm is composed of a fundamental frequency estimator and a number of 2-dimensional sinusoid trackers, and forms a slow adaptive integral manifold whose existence and stability are proved by Lyapunov stability theorem and averaging method. If filter's frequency parameters are the same as those of the harmonics compositions then it is uniformly asymptotically stable, and the fundamental frequency and harmonics (inter-harmonics) with their amplitudes can be precisely tracked in exponential convergence. The frequency characteristics expression and the characteristic matrix are derived, and the influence of the filter parameters on frequency characteristics is investigated. The validity of the proposed algorithm is verified by simulation and it is pointed out that better noise property can be achieved by decreasing bandwidth and adaptive gain.

**Key words** Adaptive notch filter, fundamental frequency estimate, stability analysis, integral manifolds, multi-harmonic analysis

在工程中进行谐波分析<sup>[1-2]</sup>、消除周期干扰<sup>[3]</sup>以及抑制电源噪声<sup>[4]</sup>, 都归结为把给定信号分解为不同频率的正弦分量之和, 以便对信号进行分析和滤波. 对于频率不变的平稳周期信号, 广泛应用的工具主要是离散傅里叶变换 DFT 及其改进算法<sup>[5]</sup>. 它们都是基于时域内积定义的频域方法, 常选取某分量一个周期内的信号采样值, 进行加权平均而获取该正弦相量的实部和虚部, 得到相应的幅值和初相位. DFT 算法获得精确分析的前提条件是保证信号时间窗长度准确等于该分量的整周期数, 否则由于频谱泄漏产生误差<sup>[6]</sup>, 使得 DFT 算法不适合分析变频率信号和间谐波. 近年来自适应陷波滤波器(Adaptive notch filter, ANF)广泛应用于信号分析中<sup>[7-15]</sup>. 文献 [7] 依据锁相环电路结构、文献 [8] 依据梯度下降方法都得到非线性系统, 用来分析频率随时间变化的信号, 检测幅值、初相角以及估计频率, 但参数的物理意义不明确, 不利于性能分析与应用. 文献 [9] 最早提出离散时间条件下的 ANF, 随

后文献 [10] 提出连续时间的 ANF, 文献 [11] 提出了全局渐近收敛的频率估计算法, 文献 [12] 对文献 [11] 的算法略作改进, 然后将其运用到整数次谐波的分析中. 文献 [13] 基于梯度算法提出无限冲激响应(Infinite impulse response, IIR) 的 ANF, 文献 [14] 提出自适应时变陷波滤波器(Time-vary notch filter, TVNF), 以及文献 [15] 都可跟随频率随时间的变化. 本文提出改进的基波频率估计算法, 分析整数次谐波和非整数次间谐波, 获得各个谐波的跟随及其幅值, 说明算法的渐近稳定以及精确分析的条件. 最后通过仿真实例说明算法性能.

## 1 算法说明

### 1.1 算法结构

采用图 1 (见下页) 所示算法分析输入信号  $u$ , 其中  $\theta \neq 0$  为基波频率估计值, Tracker 1 ~ Tracker  $N$  是二维正弦跟踪器<sup>[16]</sup>, 第  $i$  个 ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 正弦跟踪器的状态变量为  $x_i, \tilde{x}_i$ , 带宽参数为  $\mu_i$ , 频率系数为  $\eta_i$ , 表示正弦跟踪器频率参数等于基波频率估计  $\theta$  的倍数, 其算法可表示为

$$\dot{x}_i = -\mu_i x_i + \eta_i \theta \tilde{x}_i$$

收稿日期 2008-07-31 收修稿日期 2008-11-12  
Received July 31, 2008; in revised form November 12, 2008  
1. 合肥工业大学电气与自动化工程学院 合肥 230009  
1. Electrical Engineering and Automation School, Hefei University of Technology, Hefei 230009  
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2009.00532

$$\dot{\tilde{x}}_i = -\eta_i \theta x_i$$

记整个滤波器组的状态变量为  $\mathcal{X} = [\mathbf{x}^T \quad \tilde{\mathbf{x}}^T]^T$ , 其中

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N]^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{x}_1 \quad \tilde{x}_2 \quad \cdots \quad \tilde{x}_N]^T$$

记  $\Lambda = \text{diag}\{\eta_1, \eta_1, \dots, \eta_N\}$  是对角矩阵,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1 \quad \mu_2 \quad \cdots \quad \mu_N]^T$  是列向量,  $\boldsymbol{\Gamma} = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T$  是全为 1 的列向量, 记  $O$  是全 0 矩阵. 于是该算法成为具有  $2N$  维状态变量  $\mathcal{X}$  和一维参数变量  $\theta$  的  $2N + 1$  维自适应陷波滤波器 ANF, 用以下方程表示

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}^T & \Lambda\theta \\ -\Lambda\theta & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ O \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = \gamma \cdot \tilde{x}_1 \cdot e = \gamma \cdot \tilde{x}_1 \left( u - \sum_{i=1}^N x_i \right) \quad (2)$$

式 (1) 是状态方程, 式 (2) 是基波频率  $\theta$  的更新法则,  $\gamma \geq 0$  为自适应增益. 当  $\gamma$  较小时, 使得估计的基波频率  $\theta$  的更新比状态  $\mathcal{X}$  的变化慢, 式 (1) 和 (2) 表示的 ANF 正好符合文献 [17] 所提出的缓慢积分流形的标准形式.

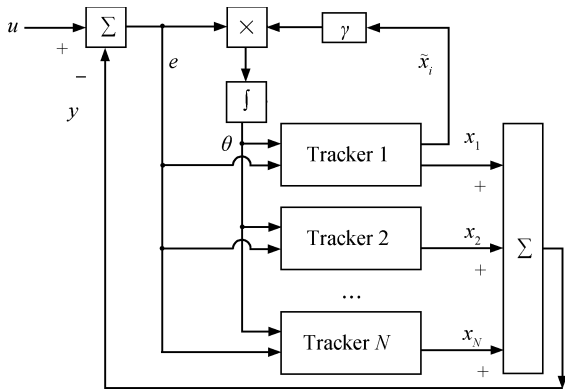


图 1 基波频率估计与多谐波分析算法

Fig.1 Scheme of fundamental frequency estimate and multi-harmonics analysis

### 1.2 稳定性分析

首先考虑  $\theta$  为常数的情况, 这相当于自适应增益  $\gamma = 0$ , 状态方程简化为线性时不变系统, 有以下的命题成立.

**命题 1.** 对于固定参数  $\theta$ , 状态方程 (1) 所确定的动力系统是一致指数稳定的.

**证明.** 取李雅普诺夫函数为

$$V(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & O \\ O & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

其中对角矩阵  $P_{11}$  为

$$P_{11} = \text{diag}\{0.5\mu_1^{-1}, 0.5\mu_2^{-1}, 0.5\mu_N^{-1}\}$$

则  $V(t)$  是正定的, 其对时间的导数为

$$\dot{V}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

其中  $Q_{11}$  是所有元素都等于 1 的  $N \times N$  矩阵, 所以  $\dot{V}(t)$  是负半定的.

若  $\dot{V}(t) = 0$ , 代入式 (1) 的齐次方程得

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}^T & \Lambda\theta \\ -\Lambda\theta & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda\theta\mathbf{x} \\ \Lambda\theta\tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

这表示状态变量分别是角频率等于  $\eta_i\theta$  的正弦量, 设在  $t = t_0$  时状态变量初值为

$$\mathbf{x}_0 = [x_{10} \quad x_{20} \quad \cdots \quad x_{N0}]^T$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = [\tilde{x}_{10} \quad \tilde{x}_{20} \quad \cdots \quad \tilde{x}_{N0}]^T$$

得到  $t \geq t_0$  时状态变量具有如下形式

$$x_i = x_{i0} \sin(\eta_i\theta t) + \tilde{x}_{i0} \cos(\eta_i\theta t) = \sqrt{x_{i0}^2 + \tilde{x}_{i0}^2} \sin(\eta_i\theta t + \delta_{i0}) = a_i \sin(\eta_i\theta t + \delta_{i0})$$

$$\tilde{x}_i = a_i \cos(\eta_i\theta t + \delta_{i0})$$

于是

$$0 = \sum_{i=1}^N a_i \sin(\eta_i\theta t + \delta_{i0}) = \begin{bmatrix} \sin(\eta_1\theta t + \delta_{10}) & \cdots & \sin(\eta_N\theta t + \delta_{N0}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_N \end{bmatrix}^T$$

选取  $N$  个不同时刻  $t_1, t_2, \dots, t_N$  代入上式, 有

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\eta_1\theta t_1 + \delta_{10}) & \cdots & \sin(\eta_N\theta t_1 + \delta_{N0}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\eta_1\theta t_N + \delta_{10}) & \cdots & \sin(\eta_N\theta t_N + \delta_{N0}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}$$

由于  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_N$  互不相等, 故上式有唯一零解

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{x_{10}^2 + \tilde{x}_{10}^2} \\ \vdots \\ \sqrt{x_{N0}^2 + \tilde{x}_{N0}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \tilde{\mathbf{x}}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

这说明若  $\dot{V}(t) = 0$ , 则系统初始状态必然为零状态, 所以在任何的非零初值状态轨迹上  $\dot{V}(t)$  不恒等于零, 系统 (1) 是全局一致渐近稳定的<sup>[18]</sup>.  $\square$

记  $I$  为单位矩阵, 在零初值条件下对式 (1) 取拉普拉斯变换得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(s, \theta) \\ \tilde{\mathbf{x}}(s, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI + \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\Gamma}^T & -\Lambda \cdot \theta \\ \Lambda \cdot \theta & sI \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ O \end{bmatrix} u(s)$$

依据分块矩阵求逆定理和矩阵求逆引理<sup>[19]</sup>, 状态传递函数矩阵为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^0(s, \theta) \\ \tilde{\mathbf{H}}^0(s, \theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s(s^2I + \Lambda^2\theta^2)^{-1}\boldsymbol{\mu}}{1 + s\boldsymbol{\Gamma}^T(s^2I + \Lambda^2\theta^2)^{-1}\boldsymbol{\mu}} \\ \frac{-\Lambda\theta(s^2I + \Lambda^2\theta^2)^{-1}\boldsymbol{\mu}}{1 + s\boldsymbol{\Gamma}^T(s^2I + \Lambda^2\theta^2)^{-1}\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

以  $s = j\omega$  代入得到状态变量频率特性

$$\mathbf{H}^0(j\omega, \theta) = [H_1^0(j\omega, \theta) \quad \cdots \quad H_N^0(j\omega, \theta)]^T$$

$$\tilde{\mathbf{H}}^0(j\omega, \theta) = [\tilde{H}_1^0(j\omega, \theta) \quad \cdots \quad \tilde{H}_N^0(j\omega, \theta)]^T$$

对应第  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 个跟踪器的频率特性为

$$\begin{aligned} H_i^0(j\omega, \theta) &= H_i^0(\omega, \theta) \exp(j\varphi^0(\omega, \theta)) = \\ & j\mu_i\omega \prod_{n=1, n \neq i}^N (\eta_n^2\theta^2 - \omega^2) [P^0(j\omega, \theta)]^{-1} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_i^0(j\omega, \theta) &= \tilde{H}_i^0(\omega, \theta) \exp(j\tilde{\varphi}^0(\omega, \theta)) = \\ & -\mu_i\eta_i \prod_{n=1, n \neq i}^N (\eta_n^2\theta^2 - \omega^2) [P^0(j\omega, \theta)]^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P^0(j\omega, \theta) &= \prod_{k=1}^N (\eta_k^2\theta^2 - \omega^2) + \\ & j\omega \sum_{k=1}^N \mu_k \prod_{n=1, n \neq k}^N (\eta_n^2\theta^2 - \omega^2) \quad (6) \\ \varphi^0(\omega, \theta) &= \arg \left( \frac{\prod_{k=1}^N (\eta_k^2\theta^2 - \omega^2)}{\omega \sum_{k=1}^N \mu_k \prod_{n=1, n \neq k}^N (\eta_n^2\theta^2 - \omega^2)} \right) \quad (7) \end{aligned}$$

注意到所有的  $H_i^0(j\omega, \theta)$  的相位都是  $\varphi^0(\omega, \theta)$ , 所有的  $\tilde{H}_i^0(j\omega, \theta)$  的相位都是  $\tilde{\varphi}^0(\omega, \theta)$ , 并且

$$\tilde{\varphi}^0(\omega, \theta) = \frac{\pi}{2} + \varphi^0(\omega, \theta)$$

系统的输出  $y$  的频率特性为

$$H_y^0(j\omega, \theta) = \sum_{i=1}^N H_i^0(j\omega, \theta)$$

考虑输入信号包含  $N$  个不同频率的正弦信号

$$u = \sum_{k=1}^N U_k \sin \phi_k = \sum_{k=1}^N U_k \sin(\omega_k \Omega_0 t + \delta_k) \quad (8)$$

其中,  $\Omega_0$  是基波角频率,  $\omega_k$  是第  $k$  个输入分量频率相对于基波的倍数, 可以是整数和小数, 故本算法适用于整数次谐波和非整数次简谐波. 记输入信号相对频率向量为

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_N]^T$$

幅值向量为

$$\mathbf{U} = [U_1 \quad U_2 \quad \cdots \quad U_N]^T$$

若实际输入成分个数为  $K < N$ , 可认为余下的  $N - K$  个分量的幅值都等于 0, 而其相对频率参数为  $\omega_k = \eta_k$  ( $k = K + 1, K + 2, \dots, N$ ). 第  $i$  个正弦跟踪器的状态输出为

$$x_i^0(t, \theta) = \sum_{k=1}^N H_{ik}^0 U_k \sin(\phi_k + \varphi_k^0) \quad (9)$$

$$\tilde{x}_i^0(t, \theta) = \sum_{k=1}^N \tilde{H}_{ik}^0 U_k \cos(\phi_k + \varphi_k^0) \quad (10)$$

其中  $H_{ik}^0$ 、 $\tilde{H}_{ik}^0$ 、 $\varphi_k^0$  通过在式 (4) ~ (7) 中以  $\omega_k \Omega_0$  代替  $\omega$  而得到.

考虑自适应增益  $\gamma > 0$  的情况, 给出以下命题.

**命题 2.** 存在  $\gamma_0 > 0$ , 使对任意  $\gamma \in [0, \gamma_0]$ , 式 (1) 和 (2) 具有惟一的一维积分流形

$$\mathcal{M}_\gamma = \{(t, \theta, \boldsymbol{\mathcal{X}}) : \boldsymbol{\mathcal{X}} = \mathbf{h}_\gamma(t, \theta)\}$$

它任意接近  $\gamma = 0$  所对应的固定参数积分流形  $\mathcal{M}_0$ .

**证明.** 引入状态  $\boldsymbol{\mathcal{X}}$  与  $\boldsymbol{\mathcal{X}}^0(t, \theta)$  之差作为新变量

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}} = [\hat{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}^T \quad \tilde{\boldsymbol{\mathcal{Z}}}^T]^T = \boldsymbol{\mathcal{X}} - \boldsymbol{\mathcal{X}}^0(t, \theta)$$

将式 (1) 和 (2) 改写为

$$\dot{\boldsymbol{\mathcal{Z}}} = A(\theta)\boldsymbol{\mathcal{Z}} - \gamma \boldsymbol{\mathcal{X}}_\theta^0(t, \theta) F(t, \theta, \boldsymbol{\mathcal{Z}}) \quad (11)$$

$$\dot{\theta} = \gamma F(t, \theta, \boldsymbol{\mathcal{Z}}) =$$

$$\gamma(\tilde{z}_1 + \tilde{x}_1^0(t, \theta)) \left( u - \sum_{i=1}^N (\tilde{z}_i + x_i^0(t, \theta)) \right) \quad (12)$$

其中

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\Gamma}^T & \Lambda\theta \\ -\Lambda\theta & O \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{X}}_\theta^0(t, \theta) = \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{X}}^0(t, \theta)}{\partial \theta}$$

我们验证系统 (11) 和 (12) 满足文献 [17] 中定理 3.1 的三个前提条件:

1) 由命题 1 知固定  $\theta$  时方程 (11) 是一致指数稳定的;

2)  $\mathbf{x}^0(t, \theta)$  和  $\mathbf{x}_\theta^0(t, \theta)$  关于  $(t, \theta)$  是有界的和连续的, 从而  $\mathbf{x}_\theta^0(t, \theta)$  关于  $\theta$  满足 Lipschitz 条件;

3)  $F(t, \theta, \mathbf{z})$  是连续函数, 故在紧集上是有界并且关于  $\theta$  和  $\mathbf{z}$  满足 Lipschitz 条件.

根据文献 [17] 中定理 3.1 知: 对于足够小的  $\gamma_0$ , 存在  $\gamma$ -族缓慢流形  $\mathcal{M}_\gamma$ .  $\square$

ANF 的积分流形是  $2N + 1$  维空间中的超曲面, 若在某时刻  $t_0$ , 点  $(\mathbf{x}(t_0), \theta(t_0))$  在该积分流形上, 则对于任意的有限时刻  $t \geq t_0$ , 总有  $(\mathbf{x}(t), \theta(t))$  也在积分流形上<sup>[20]</sup>.

采用平均方法<sup>[20]</sup> 并依据文献 [17] 中定理 4.1, 可证明参数  $\theta$  的更新法则 (2) 的稳定性.

**命题 3.** 在积分流形  $\mathcal{M}_\gamma$  上, 当  $\eta_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 时参数  $\theta$  的更新法则是渐近稳定的, 即当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $\theta \rightarrow \Omega_0$ .

**证明.** 注意到  $\gamma = 0$  包含  $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ , 此时式 (12) 的更新法则简化为

$$\dot{\theta} = \gamma F(t, \theta, \mathbf{0}) = \gamma(\tilde{x}_1^0(t, \theta)) \left( u - \sum_{i=1}^N x_i^0(t, \theta) \right) \quad (13)$$

将式 (8) ~ (10) 代入式 (13), 有

$$F(t, \theta, \mathbf{0}) = \tilde{x}_1^0(t, \theta) \left( u - \sum_{i=1}^N x_i^0(t, \theta) \right) = \mathbf{U}^T \cdot G(t, \theta) \cdot \mathbf{U}$$

记  $G(t, \theta) = [g_{ik}(t, \theta)]_{N \times N}$ , 则

$$g_{ik}(t, \theta) = \tilde{H}_{1i}^0 \cos(\phi_i + \varphi_i^0) \times \left( \sin \phi_k + \sum_{m=1}^N H_{mi}^0 \sin(\phi_i + \varphi_i^0) \right)$$

若相对频率参数  $\omega_k$  都是有理数, 选择  $\hat{\omega}$  为相对频率  $\omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) 的最大公因子, 则  $T_m = 2\pi/\Omega_0/\hat{\omega}$  就是输入信号中各个正弦分量的最小公倍周期, 从而  $G(t, \theta)$  和  $F(t, \theta, \mathbf{0})$  关于  $t$  是周期  $T_m$  的. 应用平均方法, 记

$$\bar{g}_{ik}(\theta) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} g_{ik}(t, \theta) dt$$

根据三角函数的正交性, 当  $i \neq k$  时, 有  $\bar{g}_{ik}(\theta) = 0$ , 而

$$\bar{g}_{ii}(\theta) = -\theta(\eta_i^2 \theta^2 - \omega_i^2 \Omega_0^2) \bar{g}_i^2(\theta)$$

$$\bar{g}_i^2(\theta) = \frac{\mu_i \eta_i \prod_{n=1, n \neq i}^N (\eta_n^2 \theta^2 - \omega_n^2 \Omega_0^2)^2}{2|P^0(j\omega, \theta)|^2}$$

于是

$$\bar{G}(\theta) = \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} G(t, \theta) dt = \text{diag}\{\bar{g}_{11}(\theta), \dots, \bar{g}_{NN}(\theta)\}$$

得到式 (13) 的平均方程为

$$\dot{\theta}_a = \gamma \bar{F}_a(\theta_a) = -\gamma \theta_a \sum_{i=1}^N (\eta_i^2 \theta_a^2 - \omega_i^2 \Omega_0^2) \bar{g}_i^2(\theta_a) U_i^2$$

当  $\eta_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), 即信号的谐波构成全部已知时

$$\dot{\theta}_a = \gamma \bar{F}_a(\theta_a) = -\gamma \theta_a \sum_{i=1}^N (\theta_a^2 - \Omega_0^2) \bar{g}_i^2(\theta_a) U_i^2 \eta_i^2$$

并且

$$\frac{\partial \bar{F}_a}{\partial \theta_a}(\theta_a) = -2\theta_a \sum_{i=1}^N \bar{g}_i^2(\theta_a) U_i^2 \eta_i^2 - (\theta_a^2 - \Omega_0^2) \times \left( \sum_{i=1}^N \bar{g}_i^2(\theta_a) U_i^2 \eta_i^2 + \theta_a \frac{\partial}{\partial \theta_a} \sum_{i=1}^N \bar{g}_i^2(\theta_a) U_i^2 \eta_i^2 \right)$$

显然,  $\theta_a = \Omega_0$  是  $\bar{F}_a(\theta_a)$  的孤立平衡点, 并且

$$\left. \frac{\partial \bar{F}_a}{\partial \theta_a}(\theta_a) \right|_{\theta_a = \Omega_0} < 0$$

由文献 [17] 中定理 4.1 知, 此时参数  $\theta$  的更新法则是一致渐近稳定的, 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $\theta \rightarrow \Omega_0$ , 收敛速度与  $\gamma$  成正比.  $\square$

## 2 多谐波分析

将式 (8) 的输入信号改写为

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{u} = [1 \ 1 \ \dots \ 1] [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_N]^T$$

系统状态输出为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \tilde{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H(j\omega, \theta) \\ \tilde{H}(j\omega, \theta) \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

其中, 状态转移函数矩阵为

$$H(j\omega, \theta) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1N} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N1} & H_{N2} & \dots & H_{NN} \end{bmatrix}$$

$$H_{ik} = \frac{j\mu_i \omega_k \prod_{n=1, n \neq i}^N (\eta_n^2 \theta^2 - \omega_n^2 \Omega_0^2)^2}{P^0(j\omega_k, \theta)}$$

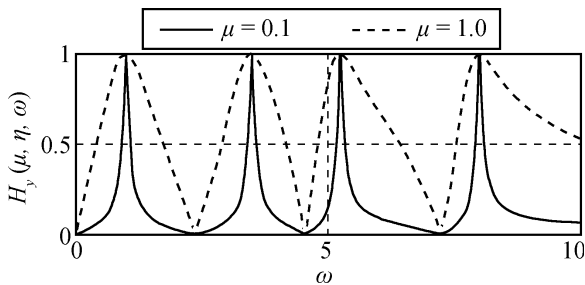
当  $\eta_i = \omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 时, 随着时间推移  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\theta \rightarrow \Omega_0$ , 状态转移函数矩阵变为单位矩阵

$$H(j\omega, \theta) = I_{N \times N}, \quad \tilde{H}(j\omega, \theta) = jI_{N \times N}$$

于是可获得每个正弦成分  $u_k$  的准确的跟随信号, 即  $x_k = u_k$ . 此时, 由式 (3) 能够得到每个频率分量的幅值. 对于式 (8) 输入信号, 该 ANF 有唯一的周期轨道

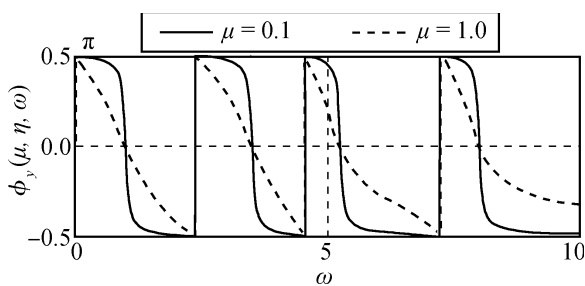
$$\begin{pmatrix} \mathcal{O} \\ \bar{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{O}_N \\ \Omega_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_i = \begin{pmatrix} U_i \sin(\omega_i \Omega_0 + \delta_i) \\ U_i \cos(\omega_i \Omega_0 + \delta_i) \end{pmatrix}$$

在频率参数稳态下, 系统频率响应只与参数  $\mu$ ,  $\eta$ ,  $\omega$  的相对值有关, 设  $N = 4$ ,  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  分别等于基波角频率  $\Omega_0$  的 1, 3.5, 5.25, 8 倍, 取  $\mu_i = \mu \Omega_0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), 输入信号频率等于  $\omega \Omega_0$ ,  $\omega$  从 0 到 10 变化, 图 2 是稳态输出幅频特性曲线和相频特性曲线.



(a) 幅频特性

(a) Amplitude frequency characteristic



(b) 相频特性

(b) Phase frequency characteristic

图 2 算法的稳态频率特性

Fig. 2 Frequency characteristic of proposed algorithm

整个并联滤波器成为梳状滤波器, 在每个  $\eta_i$  处形成一个峰值为 1 的梳齿, 由于频率特性  $H_i(j\omega)$  相互抵消, 使得在两个梳齿之间出现一个零点, 该频率值决定于全部的参数  $\mu_i$  和  $\eta_i$ , 系统具有陷波器的功

效.  $\mu_i$  的大小决定对应幅频特性的梳齿的带宽,  $\mu_i$  越小梳齿的通带越窄, 频率选择性越好, 同时两个梳齿之间的阻带越宽, 滤波器越趋向陷波器.

$N$  个跟踪器频率参数把频率轴分为  $N + 1$  个区间, 在  $\eta_1 < \omega < \eta_N$  的范围内, 系统输出相频特性  $\varphi_y(\omega)$  被分为形状相似的  $N - 1$  段.  $\mu$  越小, 在频率参数  $\eta_i$  处的相频特性越陡峭, 表明在该频点处对频率变化越敏感;  $\mu$  越大, 在频率参数  $\eta_i$  处的相频特性越平缓.

在进行谐波/间谐波分析中, 除获得各个分量的跟随信号之外, 估计每个正弦分量的幅值也是主要工作之一. 第  $i$  个正弦跟踪器所分析的分量的幅值估计  $a_i$  为

$$a_i = \sqrt{x_i^2 + \tilde{x}_i^2}$$

### 3 应用仿真

设输入信号  $u$  单位为伏特 (V), 含有 3 个正弦成分, 即

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + u_3 = U_1 \sin(2\pi f_1 t + 0.4\pi) + \\ &U_2 \sin(3.18 \times 2\pi f_1 t - 0.2\pi) + \\ &U_3 \sin(6.55 \times 2\pi f_1 t + 0.1\pi) \end{aligned}$$

定义  $e_k = u_k - x_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 为各个分量跟随误差信号, 总误差为  $e_0 = \sum_{k=1}^4 e_k$ . 采用 4 个跟踪器并联, 将频率系数设为

$$[\eta_1 \ \eta_2 \ \eta_3 \ \eta_4]^T = [1 \ 3.18 \ 6.55 \ 8]^T$$

选择带宽参数为  $\mu_1 \sim \mu_4$  都等于  $\mu$ , 选取采样频率为 10 kHz, 在 Matlab 7.0 下仿真.

#### 3.1 跟随性能

令  $\mu = 50\pi$ ,  $\gamma = 1000\pi$ , 基波频率  $f_1$  的初始值设为 50 Hz, 各个状态变量的初值都设为 1.0. 仿真结果如图 3~5 (见下页) 所示, 各参数实际值用实线表示, 估计值用虚线表示.

在  $t = 0.2$  s 处, 图 3 中基波频率的估计值就达到了输入信号的 49 Hz 初始频率, 图 4 的  $a_1 \sim a_3$  准确跟随到  $u_1 \sim u_3$  的幅值  $U_1 \sim U_3$ , 其值分别为 1.0 V, 0.6 V, 0.2 V, 由于  $u$  中没有 8 次谐波, 故  $a_4$  接近于零, 而图 5 的误差信号展示此时状态变量  $x_1 \sim x_3$  已经实现对  $u_1 \sim u_3$  的准确跟随. 在  $t = 1.0$  s 处, 基波频率跳变到 50 Hz, 由此引发的暂态过程在 1.2 s 结束. 在  $t = 1.5$  s 处,  $U_1, U_2, U_3$  同时分别产生  $-0.2$  V,  $-0.2$  V,  $0.2$  V 的跳变, 经过 0.1 s 后, 各个幅值的估计值就实现准确跟踪, 同时误差收敛到零, 此时算法能够实现对基波频率、各个正弦分量及其幅值的无差跟随, 而且对基波分量与间谐波分量具有相同的检测性能.

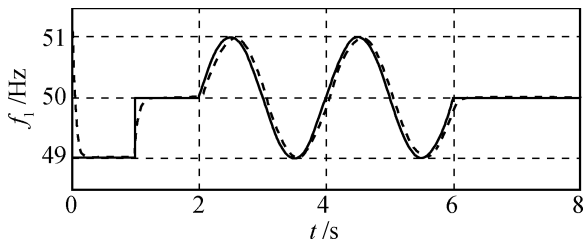


图3 实际/估计基波频率

Fig.3 Actual/estimated fundamental frequencies

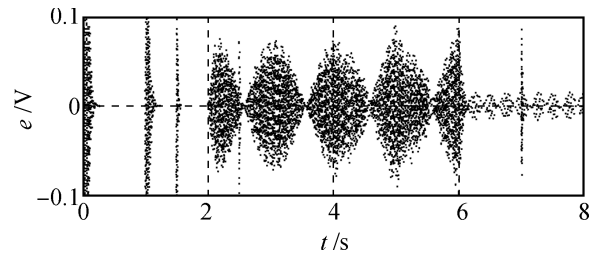
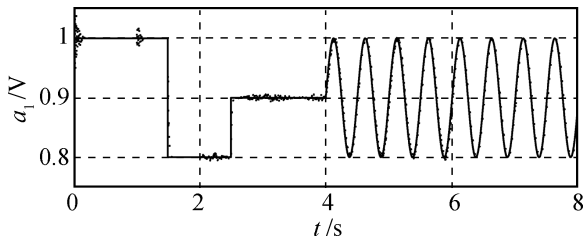


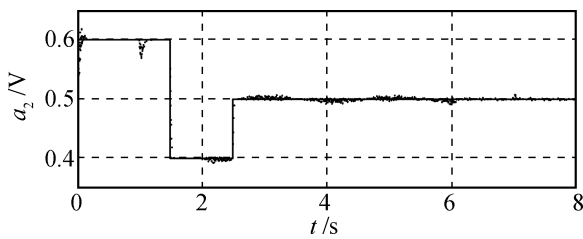
图5 总跟随误差

Fig.5 Sum of tracking errors



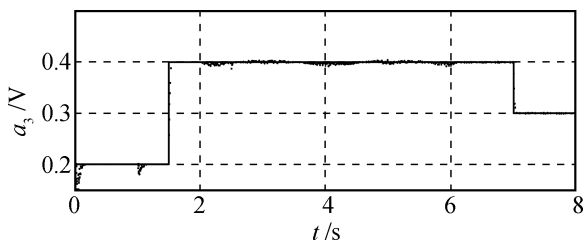
(a) 基波幅值

(a) Amplitude of fundamental



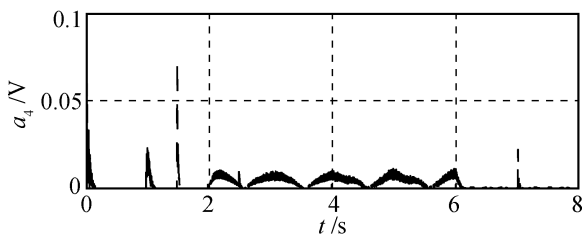
(b) 间谐波幅值 1

(b) Amplitude of inter-harmonic 1



(c) 间谐波幅值 2

(c) Amplitude of inter-harmonic 2



(d) 间谐波幅值 3

(d) Amplitude of inter-harmonic 3

图4 各成份的幅值

Fig.4 Amplitudes of components

在  $t = 2.0 \sim 6.0\text{s}$  期间, 基波频率叠加了幅值为  $1\text{Hz}$ 、振荡频率为  $0.5\text{Hz}$  的振荡过程. 图 3 显示虽存在很小的时间滞后, 但总体上跟随了基波频率的变化,  $a_1$ 、 $a_2$  基本跟踪了  $U_1$ 、 $U_2$  在  $2.5\text{s}$  处的跳变, 图 5 显示此时不能实现无误差跟随, 存在具有拟周期变化的较小误差.

在  $t = 4.0 \sim 8.0\text{s}$  期间, 基波分量幅值叠加频率等于  $2\text{Hz}$ 、幅值为  $0.1\text{V}$  的调制信号, 特别在  $t = 4.0 \sim 6.0\text{s}$  时间段, 基波频率与基波幅值同时振荡变化, 这使得图 5 的跟随误差加大. 图 3 中  $4.0 \sim 6.0\text{s}$  的曲线与  $2.0 \sim 4.0\text{s}$  的曲线相比, 没有明显的不同,  $6.0 \sim 8.0\text{s}$  期间保持水平直线, 这表明基波频率仍能保持好的跟随性能. 图 4 中各个幅值的估计值基本保持了准确跟随, 在  $6.0 \sim 8.0\text{s}$  内, 由于  $a_2$  的频点比  $a_3$  的频点更接近  $u_1$ , 受  $u_1$  的影响更大,  $a_2$  曲线上的毛刺比  $a_3$  更加明显.

### 3.2 参数影响

图 6 表明参数  $\gamma$  主要决定基波频率估计的响应速度,  $\gamma$  越小则频率跟随速度越慢, 对于噪声的敏感度降低, 频率估计抗干扰性能更好.

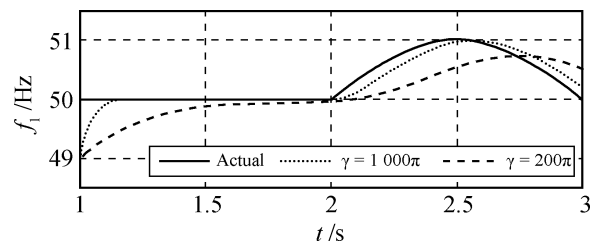
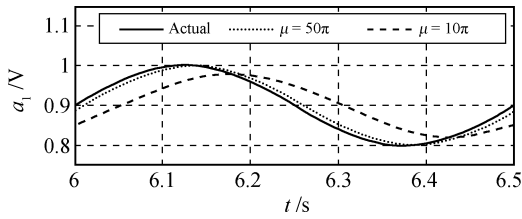


图6  $\mu = 50\pi$  时基波频率

Fig.6 Fundamental frequency when  $\mu = 50\pi$

图 7 (见下页) 显示参数  $\mu$  主要决定幅值估计的响应速度,  $\mu$  越小则幅值跟随速度越慢, 快速跟随性能减弱, 幅值响应的带宽越小, 对于噪声的敏感度降低, 幅值估计抗干扰性能更好.

图 7  $\gamma = 1000\pi$  时基波频率Fig.7 Fundamental frequency when  $\gamma = 1000\pi$ 

### 3.3 噪声特性

再在输入信号  $u$  中叠加均值为 0, 方差等于 0.1 的随机噪声  $w(t)$ . 选择  $\mu = 10\pi$ 、 $\gamma = 200\pi$ , 得到如图 8~10 的仿真结果,  $e_1 = u_1 - x_1$  为基波分量跟随误差. 在噪声环境下, 即使基波频率与幅值都为恒定的, 频率和幅值估计曲线仍然存在毛刺, 难以获得准确的无误差的信号跟随. 减小  $\mu$ 、 $\gamma$  能够获得较好的稳态精度, 但会降低动态跟随速度.

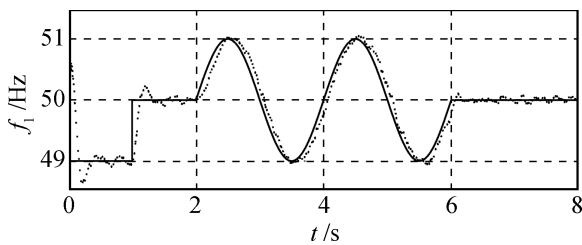


图 8 噪声下估计基波频率

Fig.8 Estimated fundamental frequency with noise

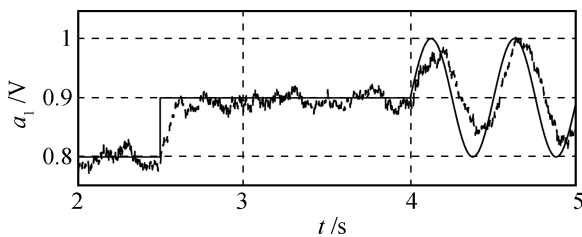


图 9 噪声下估计基波幅值

Fig.9 Estimated amplitude of fundamental with noise

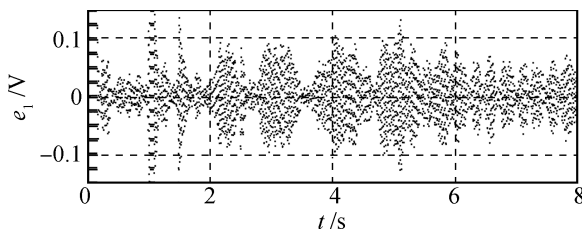


图 10 噪声下基波跟随误差曲线

Fig.10 Tracking error of fundamental with noise

## 4 结论

本文采用自适应陷波滤波器分析基波频率可变的信号的谐波成分. 对于谐波结构已知的信号, 所提算法是渐近稳定的, 能获得基波频率、各谐波/间谐波及其幅值的准确跟随, 其收敛速度决定于滤波器的带宽参数和自适应增益的大小. 算法优点是把谐波系数设置为整数或小数, 方便分析整数次谐波或非整数次间谐波. 在噪声环境下, 减小带宽参数和自适应增益, 能提高分析精度. 通过增加滤波器的个数, 对频率轴精细划分, 采用窄带滤波, 可减小未知谐波成分导致的分析误差, 提高整体的分析性能.

## References

- McNamara D M, Ziarani A K, Ortmeier T H. A new technique of measurement of nonstationary harmonics. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2007, **22**(1): 387–395
- Tarek M, Melchilef S, Rahim N A. Application of adaptive notch filter for harmonics currents estimation. In: *Proceedings of International Power Engineering Conference*. Singapore, Singapore: IEEE, 2007. 1236–1240
- Brown L J, Zhang Q. Periodic disturbance cancellation with uncertain frequency. *Automatica*, 2004, **40**(4): 631–637
- Clark S L, Famouri P, Cooley W L. Elimination of supply harmonics. *IEEE Industry Applications Magazine*, 1997, **3**(2): 62–67
- Zhang F S, Geng Z X, Yuan W. The algorithm of interpolating windowed FFT for harmonic analysis of electric power system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2001, **16**(2): 160–164
- Andria G, Savino M, Trotta A. Windows and interpolation algorithms to improve electrical measurement accuracy. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1989, **38**(4): 856–863
- Ziarani A K, Konrad A. A method of extraction of nonstationary sinusoids. *Signal Processing*, 2004, **84**(8): 1323–1346
- Karimi-Ghartemani M, Ziarani A K. Performance characterization of a nonlinear system as both an adaptive notch filter and a phase-locked loop. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, **18**(1): 23–53
- Regalia P A. An improved lattice-based adaptive IIR notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, **39**(9): 2124–2128
- Bodson M, Douglas S C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 1997, **33**(12): 2213–2221

- 11 Hsu L, Ortega R, Damm G. A globally convergent frequency estimator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(4): 698–713
- 12 Mojiri M, Karimi-Ghartemani M, Bakhshai A. Time-domain signal analysis using adaptive notch filter. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, **55**(1): 85–93
- 13 Mvuma A, Nishimura S, Hinamoto T. Tracking analysis of an adaptive IIR notch filter using gradient-based algorithm. In: *Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Seattle, USA: IEEE, 2008. 1148–1151
- 14 Johansson T A, White P R. Instantaneous frequency estimation at low signal-to-noise ratios using time-varying notch filters. *Signal Processing*, 2008, **88**(5): 1271–1288
- 15 Ta M, DeBrunner V. Adaptive notch filter with time-frequency tracking of continuously changing frequencies. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. Las Vegas, USA: IEEE, 2008. 3557–3560
- 16 Riedle B, Kokotovic P. Integral manifolds of slow adaptation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1986, **31**(4): 316–324
- 17 Wu Qi, Wang Shi-Fu. *Principles of Automatic Control (Volume 2)*. Beijing: Tsinghua University Press, 2006. 448–450 (吴麒, 王诗宓. 自动控制原理(下册). 北京: 清华大学出版社, 2006. 448–450)
- 18 Zhang Xian-Da. *Matrix Analysis and Applications*. Beijing: Tsinghua University Press, 2004. 56–71 (张贤达. 矩阵分析与应用. 北京: 清华大学出版社, 2004. 56–71)
- 19 Lin Zhen-Sheng. *Almost Periodic Differential Equations and Integral Manifolds*. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1982. 166–219 (林振声. 概周期微分方程与积分流形. 上海: 上海科学技术出版社, 1982. 166–219)



**储昭碧** 合肥工业大学讲师, 博士研究生. 主要研究方向为电能质量. 本文通信作者. E-mail: chuzhaobi@126.com (CHU Zhao-Bi Lecturer, Ph. D. candidate at Hefei University of Technology. His main research interest is power quality. Corresponding author of this paper.)



**张崇巍** 合肥工业大学教授. 主要研究方向为电力电子技术. E-mail: cwzhang@hfut.edu.cn (ZHANG Chong-Wei Professor at Hefei University of Technology. His main research interest is power electron technology.)



**冯小英** 合肥工业大学高级实验师. 主要研究方向为检测技术与自动化. E-mail: czbfxy@126.com (FENG Xiao-Ying Senior laboratory assistant at Hefei University of Technology. Her research interest covers measurement and automation.)