第 34 卷 第 7 期　　自 动 化 学 报　　Vol. 34, No. 7
2008 年 7 月　　ACTA AUTOMATICA SINICA　　July, 2008

关于具有不同基函数的标准模糊系统逼近问题的研究

陈 刚 [1,2]

摘　要　在标准模糊系统的基础上建立了正规二次多项式和正规三角函数为基函数的两类新模糊系统, 进而提出了以正规三角形函数为基函数的标准模糊系统与所提出模糊系统的比较问题. 通过采用数值分析中的余项与辅助函数方法, 对上述三类模糊系统进行了误差精度的分析, 对所建立的两个新模糊系统首次给出了从单输入单输出到多输入单输出的误差界公式. 同时, 对它们的逼近误差精度进行了比较分析, 指出了三类模糊系统的优劣. 最后, 通过算例验证了上述理论结果的正确性.

关键词　标准模糊系统, 模糊划分, 模糊基函数, 逼近误差界
中图分类号　TP13

On Approaching Precisions of Standard Fuzzy Systems with Different Basic Functions

CHEN Gang [1,2]

Abstract　The paper establishes the standard fuzzy systems with partition of normal quadratic polynomial membership functions and normal trigonometric membership functions. The comparison problems of fuzzy system with normal triangle membership functions and the two fuzzy systems are put forward. Based on above standard fuzzy systems, approximation error bounds are discussed by interpolation theory. Universal approximation error bounds of these fuzzy systems from SISO to MISO are given and their relations are established. The paper employs error remainder term and auxiliary function in the proving process for the first time. Moreover, advantages and shortcomings of these fuzzy systems are compared and correlative conclusions are obtained. At last, computing examples are given and the validity of the conclusions is confirmed.

Key words　Standard fuzzy systems, fuzzy partition, fuzzy basic functions, approaching error bounds

近年来模糊系统的逼近性质越来越受到人们的关注. 自 Buckley[1−2] 指出模糊系统可以做为通用的模糊控制器以来, 许多学者对模糊系统逼近性质展开了研究[3−5]. Wang[6−9] 给出了以高斯函数设计的标准模糊系统是万能逼近器的结论; Zeng[10−12] 对三角形标准模糊系统给出了一系列的研究结果, 对模糊系统的逼近精度问题从一阶、二阶及四阶进行了研究, 并对高于二阶模糊系统进行了分析, 但没有对其他模糊函数加以讨论; Hao[13−15] 首次给出模糊系统具有一阶逼近的结论并给出一个充分条件, 对某些模糊系统又给出了必要条件, 但其所针对并非是我们所讨论的标准模糊系统; Yager[16] 讨论了对通用模的一类模糊系统的逼近问题; Li[17−18] 讨论了不同蕴涵关系下布尔类型模糊系统的逼近特性; Hassine[19] 采用二次多项式为输入对 Sugeno 模糊系统的逼近性进行了研究. 由于模糊系统维数的爆炸问题而导致模糊系统在实际应用中遇到困难, 因此最近很多学者[20−23] 转向了分层模糊系统的研究, 并取得一些研究成果. 分层模糊系统虽然可以降低系统的维数, 但其逼近精度同原系统一样没有发生变化, 因而就逼近精度问题而言还是以不分层的模糊系统为研究对象. 目前, 人们设计模糊系统以三角形隶属函数为主, 但也选择其他函数如高斯函数、多项式函数等. 然而, 人们对以三角形隶属函数设计模糊系统研究得很充分, 得到的结果也最多 (上面所列绝大多数是这种情况), 而对由其他函数为基函数设计的模糊系统则讨论较少. 虽然 Wang[6] 给出了高斯型模糊系统是万能逼近器的结论, 但仅从逼近的角度来分析, 没有讨论其误差界; Moon[24] 给出了以多项式函数为隶属函数设计的模糊系统的误差界分析, 其理论是基于样条插值, 算法复杂, 很难用于实际模糊系统的设计; Hassine[19] 虽然采用了二次多项式作为模糊系统的输入, 但其讨论的是 Sugeno 模糊系统, 没有同以三角形隶属函数设计的标准模糊系统做比较, 也没有讨论该系统的误差界.

鉴于此, 本文将模糊系统以三角形隶属函数为主的设计推广到二次多项式和三角函数的模糊系统设计, 采用新的证明方法对上述三个模糊系统进行了逼近误差的研究, 给出了从 SISO 到 MISO 的误差界公式. 之后, 对所得结果进行了比较研究, 得出上述三类模糊系统的逼近特点. 最后, 利用例子进行数值比较, 以验证所得理论的正确性.

1　模糊系统的相关概念及公式

1.1　相关概念

在以下部分中, 我们记 $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 为 $U\subset\mathbf{R}$ 中的模糊集, 而 $A_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$ 则为其对应的模糊隶属函数.

定义 1 (模糊集的完备性). 如果对任意一点 $x\in U$, 一定存在模糊集 A_i, 有 $A_i(x)>0$, 则称 $A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 是论域 $U\subset\mathbf{R}$ 的一个完备性划分.

定义 2 (模糊集的有序性). 对任意两个在 $U\subset\mathbf{R}$ 上的模糊集 A 和 B, 如果 $hgh(A)>hgh(B)$ $(hgh(A)=x\in U|\mu_A(x)=\sup_{x'\in U}\mu_A(x'))$, 则称 $A>B$.

定义 3 (模糊集的一致性). 对于在 $U\subset\mathbf{R}$ 上的模糊集 $A_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$, 如果对某个 $x_0\in U$ 有 $A_i(x_0)=1$ 而对所有的 $j\neq i$, $A_i(x_0)=0$, 则称 $A_i(x)(i=1,2,\cdots,N)$ 在 $U\subset\mathbf{R}$ 上具有一致性. 关于这个概念的直观解释和讨论可参见文献 [10].

定义 4 (标准三角模糊划分). 设 $U=\bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i,e^{i+1}]$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)(x\in[e^i,e^{i+1}])$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组正规三角模糊集, 则称 $A_i(x)$ 是论域 U 上的一个标准三角模糊划分 (或称 $A_i(x)$ 为模糊系统的三角形基函数).

定义 5 (标准二次多项式划分). 设 $U=\bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i,e^{i+1}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)(x\in[e^i,e^{i+1}])$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组正规二次多项式模糊集, 则称 $A_i(x)$ 是论域 U 上的一个标准二次多项式划分 (这里, 我们

收稿日期 2007-01-04　收修改稿日期 2007-08-03
Received January 4, 2007; in revised form August 3, 2007
中国博士后基金 (2005-037763), 辽宁省自然科学基金 (20032144) 资助
Supported by China Postdoctor Science Foundation (2005-037763), Natural Science Foundation of Liaoning Province (20032144)
1. 大连海事大学数学系 大连 116026　2. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室 大连 116024
1. Department of Mathematics, Dalian Maritime University, Dalian 116026　2. State Key Laboratory Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024
DOI: 10.3724/SP.J.1004.2008.00823

定义 $A_i(x) = 1-(x-e^i)^2$ 和 $A_{i+1}(x) = a_i(x-e^i)^2$, a_i 是大于零的常数, 也称 $A_i(x)$ 为模糊系统的多项式基函数).

定义 6 (标准三角函数划分). 设 $U = \bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i, e^{i+1}]$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)(x \in [e^i, e^{i+1}])$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组正规三角函数模糊集, 则称 $A_i(x)$ 是论域 U 上的一个标准三角函数划分 (这里, 我们定义 $A_i(x) = \sin[k_i(x-e^i)+i/2\pi]$ 和 $A_{i+1}(x) = 1-\sin[k_i(x-e^i)+i/2\pi]$, $k_i > 0$, 也称 $A_i(x)$ 为模糊系统的三角基函数).

1.2 模糊系统

设 $f: U \subset \mathbf{R}^n$, 这里 $U = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \subset \mathbf{R}^n$ 是输入空间, $V \subset \mathbf{R}$ 是输出空间. 一般的模糊系统通常由四部分组成: 模糊器, 模糊规则库, 模糊推理和解模糊器. 假设模糊器为最常见的单值模糊器, 推理规则库由 $R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 组成: 若 x_1 是 $A_1^{i_1}$, x_2 是 $A_2^{i_2}, \cdots, x_n$ 是 $A_n^{i_n}$, 则 y 是 $B_{i_1,i_2\cdots i_n}$, $i_j = 1,2,\cdots,N_j$. 这里, $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是模糊系统的输入变量, y 是模糊系统的输出变量, 在 U_j 中的模糊集 $A_j^{i_j}$ 和在 V 中的模糊集 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 分别用隶属函数 $A_j^{i_j}(x_j)$ 和 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)$ 表示. 若上述模糊推理规则中每一条规则都是在 $U \times V = U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \times V$ 上的模糊蕴涵关系 $A_i = A_1^{i_1} \times A_2^{i_2} \times \cdots \times A_n^{i_n} \mapsto B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$, 其隶属函数如下:

$$R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(\boldsymbol{X}, y) = A_1^{i_1}(x_1) * \cdots * A_n^{i_n}(x_n) * B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)$$

其中, $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U$, $y \in V$. 令 A 为论域 U 上的一个任意模糊集, 则上式中的 $R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 通过 "sup-star" 蕴涵算子确定了 V 中的模糊集 $V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}$ 如下

$$V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}} = \sup_{A(\boldsymbol{X})\in U}[A(\boldsymbol{X}) * R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(\boldsymbol{X}, y)] \tag{1}$$

在本文中, 我们假定 $*$ 是代数积 (它是在应用中最常用的 T 模), "sup-star" 合成算子变成 "sup-product", 则式 (1) 简化为

$$V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}(y) = \sup_{\boldsymbol{X}\in U}[A(\boldsymbol{X})\prod_{j=1}^{n} A_j^{i_j}(x_j) B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)] \tag{2}$$

解模糊器具有把 V 中的模糊集映射为 V 中明确集的功能, 这里把解模糊器选择为在应用中广泛使用的中心平均解模糊器, 这样 V 中的模糊集就转化为 V 中明确点

$$y = \frac{\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n} y_{i_1,i_2,\cdots,i_n} V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}(y)}{\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n} V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}(y)}$$

这里, $y_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 是 V 中模糊集 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)$ 取最大值所对应的点 (当 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)$ 是正规模糊集时, $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y) = 1$). 本文中, 我们始终假定 $B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y)$ 是正规模糊集. 当 $A = A_{\boldsymbol{X}}$ 是单值模糊集时, 式 (2) 可简化为

$$V_{A\circ R_{i_1,i_2,\cdots,i_n}}(y) = \prod_{j=1}^{n} A_j^{i_j}(x_j) B_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(y) \tag{3}$$

基于上述结论, 式 (3) 可以表示为

$$y = f(\boldsymbol{X}) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} A_j^{i_j}(x_j)}{\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\prod\limits_{j=1}^{n} A_j^{i_j}(x_j)} y_{i_1,i_2,\cdots,i_n} \tag{4}$$

2 模糊系统的逼近误差界

2.1 单输入、单输出模糊系统的逼近误差界

我们首先建立单输入、单输出模糊系统的逼近误差界公式. 对于具有下列模糊规则库 R_i 的模糊系统: 若 x 是 A_i, Y 是 B_i, $i = 1,2,\cdots,n$, 则模糊系统的输出可表示为

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i(x)}{\sum\limits_{i=1}^{N} A_i(x)} y_i \tag{5}$$

我们给出有关定理.

定理 1. 设 $U = \bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i, e^{i+1}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准的三角形、二次多项式及三角函数模糊划分 (如定义 4 ~ 6 所示), $g(x)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty \le 2\|g'(x)\|_\infty h \tag{6}$$

这里 $h = \max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1} - e^i)$, $\|g(x)\|_\infty = \sup_{x\in U}|g(x)|$.

证明. 由于 $A_i(x)$ 是对论域 U 满足完备性、一致性和有序性的标准划分 (不管 $A_i(x)$ 的具体形式), 则式 (4) 中的 $f(\boldsymbol{X})$ 可变为如下形式

$$y = f(x) = \sum_{j=i}^{i+1} \frac{A_j(x)}{\sum\limits_{j=i}^{i+1} A_j(x)} y_j \tag{7}$$

由于对任意的 $x \in U = \bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i, e^{i+1}]$, 都有 $A_i(x) + A_{i+1}(x) = 1$, 故式 (7) 可以写为

$$f(x) = A_i(x)g(e^i) + A_{i+1}(x)g(e^{i+1}) \tag{8}$$

则 $|g(x) - f(x)| \le |g'(\xi)||x - e^i| + |g'(\eta)||e^{i+1} - e^i|$, 其中 $(\xi \in (e^i, x), \eta \in (e^i, e^{i+1}))$. 令 $h = \max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1} - e^i)$, 结论得证. □

定理 1 说明对论域 U 采用上面的三种划分方法, 所得到的一阶逼近误差界的公式形式都是一样的, 因而在应用中都可采用, 其差别为计算量的大小及简易程度. 同时, 我们从证明过程中看到定理 1 的结论与论域 U 的模糊划分方式没有关系, 那么是否可以认为模糊系统的逼近精度与论域的划分方式无关? 下面, 我们把上述系统的逼近精度推广到二阶, 讨论标准模糊系统在上述不同划分下的误差界变化情况. 对于论域采用三角模糊划分, 我们有以下定理.

定理 2. 设 $U = \bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i, e^{i+1}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准的三角形模糊划分 (如定义 4 所示), $g(x)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它的误差界将满足下式

$$\|g(x) - f(x)\|_\infty \le \frac{1}{8}\|g''(x)\|_\infty h^2 \tag{9}$$

这里 $h = \max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1} - e^i)$, $\|g(x)\|_\infty = \sup_{x\in U}|g(x)|$.

证明. 同定理 1 的证明相同, 我们可以得到模糊系统如式 (8) 所示, 这里 $A_i(x)$ 为定义 4 中的形式. 定义 $R_1(x) = g(x) - f(x)$. 因为当 $x = e^i$ 时, $A_i(e^i) = 1$ 和 $A_{i+1}(e^i) = 0$; 当 $x = e^{i+1}$ 时, $A_i(e^{i+1}) = 1$, $A_{i+1}(e^{i+1}) = 0$.

通过式 (8), 可以得到 $f(e^i)=g(e^i)$, $f(e^{i+1})=g(e^{i+1})$. 进一步, 定义 $R_1(x)=K(x)(x-e^i)(x-e^{i+1})$, 其中 $K(x)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数. 由此, 可以定义如下的函数

$$\phi(t)=g(t)-f(t)-K(x)(x-e^i)(x-e^{i+1}) \tag{10}$$

其中 $x\in(e^i,e^{i+1})$ 是一个固定的参数. $t=e^i, t=e^{i+1}$ 及 $t=x$ 是 $\phi(t)=0$ 的三个根. 根据中值定理, 可以得到 $\phi''(\xi)=0$ ($\xi\in(e^i,e^{i+1})$ 与参数 x 相关). 故通过式 (10) 可得 $K(x)=1/2\times g''(\xi), \xi\in(e^i,e^{i+1})$, 将其代入式 (10), 可得 $R_1(x)=1/2\times g''(\xi)(x-e^i)(x-e^{i+1})$. 对该式两边取无穷大模并令 $h=\max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1}-e^i)$, 结论得证. □

若论域采用标准二次多项式及三角函数模糊划分, 我们有定理 3 和定理 4.

定理 3. 设 $U=\bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i,e^{i+1}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准的二次多项式模糊划分 (如定义 5 所示), $g(x)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它的误差界将满足下式

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty\le\frac{1}{8}\|g''(x)\|_\infty h^2+\frac{1}{4}\|g'(x)\|_\infty h \tag{11}$$

这里 $h=\max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1}-e^i)$, $\|g(x)\|_\infty=\sup_{x\in U}|g(x)|$.

定理 4. 设 $U=\bigcup_{i=1}^{N-1}[e^i,e^{i+1}]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个紧集, 如果 $A_i(x)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准的三角函数模糊划分 (如定义 6 所示), $g(x)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它的误差界将满足下式

$$\|g(x)-f(x)\|_\infty\le\frac{1}{8}\|g''(x)\|_\infty h^2+\frac{\pi^2}{32}\|g'(x)\|_\infty h \tag{12}$$

这里 $h=\max_{1\le i\le N-1}(e^{i+1}-e^i)$, $\|g(x)\|_\infty=\sup_{x\in U}|g(x)|$.

定理 3 和定理 4 的证明同定理 2, 故略. 由定理 2 ∼ 4 的结论可以得出对于单输入单输出模糊系统的二阶逼近精度与论域的划分方式是有关的, 其误差界的大小按标准三角模糊划分、标准二次多项式模糊划分及标准三角函数模糊划分依次增加, 且后两者的误差界大小属同一数量级, 差别不大. 这里需要注意的是由标准二次多项式及三角函数模糊划分构成的模糊系统, 由于其逼近函数形态多样故而可能包含更多的被描述对象信息, 在误差允许的情况下对某类问题是恰当的, 这需要进一步研究.

2.2 多输入、单输出模糊系统的逼近误差界

进一步, 我们将上述结果推广到多输入、单输出的模糊系统. 先就两输入单输出的情形加以讨论. 两输入单输出模糊系统的推理规则的表达形式如下: $R_{i_1i_2}$: 若 x_1 是 $A_1^{i_1}$, x_2 是 $A_2^{i_2}$, 则 y 是 $B_{i_1i_2}$. 这里, $j=1,2$, $i_j=1,2,\cdots,N_j$. 这样, 我们可以得到模糊系统的解析表达

$$y=f(\boldsymbol{X})=\sum_{i_1i_2}\frac{\prod_{j=1}^{2}A_j^{i_j}(x_j)}{\sum_{i_1i_2}\prod_{j=1}^{2}A_j^{i_j}(x_j)}y_{i_1i_2}$$

对该模糊系统若对论域 U 采用标准三角形模糊划分, 则有下面的定理.

定理 5. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准三角形模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\le\frac{1}{8}\left[\|\frac{\partial^2g}{\partial x_1^2}\|_\infty h_1^2+\|\frac{\partial^2g}{\partial x_2^2}\|_\infty h_2^2\right] \tag{13}$$

或

$$\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\le\frac{1}{8}\left[\|\frac{\partial^2g}{\partial x_1^2}\|_\infty+\|\frac{\partial^2g}{\partial x_2^2}\|_\infty\right]h^2 \tag{14}$$

这里 $h=\max h_j$, $h_j=\max_{1\le i_j\le N_i-1}h_j^{i_j}$, $j=1,2$, $i_j=1,2,\cdots,N_j-1$. 函数 $g(\boldsymbol{X})$ 在 U 上的模为 $\|g(\boldsymbol{X})\|_\infty=\sup_{\boldsymbol{X}\in U}|g(\boldsymbol{X})|$.

证明. 定义 $U=U_1\times U_2=\bigcup_{i_1=1}^{N_1-1}[e_1^{i_1},e_1^{i_1+1}]\times\bigcup_{i_2=1}^{N_2-1}[e_2^{i_2},e_2^{i_2+1}]$ 及 $U^{i_1i_2}=[e_1^{i_1},e_1^{i_1+1}]\times[e_2^{i_2},e_2^{i_2+1}]$, 则有 $U=\bigcup_{i_1=1}^{N_1-1}\bigcup_{i_2=1}^{N_2-1}U^{i_1i_2}$. 对 $\forall\boldsymbol{X}\subset U$, 有 $\boldsymbol{X}\subset U^{i_1i_2}$. 假设 $x_1\in[e_1^{i_1},e_1^{i_1+1}]$, $x_2\in[e_2^{i_2},e_2^{i_2+1}]$, 由于 $A_j^{i_j}$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准三角模糊划分, 模糊系统 $f(\boldsymbol{X})$ 解析表达式为

$$f(\boldsymbol{X})=\sum_{j=i_1}^{i_1+1}\sum_{j=i_2}^{i_2+1}\frac{A_1^{j_1}(x_1)A_2^{j_2}(x_2)}{\sum_{j=i_1}^{i_1+1}\sum_{j=i_2}^{i_2+1}A_1^{j_1}(x_1)A_2^{j_2}(x_2)}g(e_1^{j_1},e_2^{j_2}) \tag{15}$$

基于 U 和 $A_j^{i_j}(\boldsymbol{X})$ 的条件, 有 $A_j^{i_j}(x_j)+A_j^{i_j+1}(x_j)=1$. 由此可得 $\sum_{j=i_1}^{i_1+1}\sum_{j=i_2}^{i_2+1}A_1^{j_1}(x_1)A_2^{j_2}(x_2)=1$, 则模糊系统 $f(\boldsymbol{X})$ 可简化为

$$f(\boldsymbol{X})=\sum_{j=i_1}^{i_1+1}\sum_{j=i_2}^{i_2+1}A_1^{j_1}(x_1)A_2^{j_2}(x_2)g(e_1^{j_1},e_2^{j_2}) \tag{16}$$

进而, 我们定义 $R_2(x_1,x_2)=g(x_1,x_2)-f(x_1,x_2)$. 很明显, $(e_{j_1}^{i'},e_{j_2}^{i''})(j_1,j_2=1,2;\ i'=i_1,i_1+1;i''=i_2,i_2+1)$ 满足 $R_2(x_1,x_2)=0$. 这样, 我们可以定义下式

$$\begin{aligned}R_2(x_1,x_2)=\ &K_1(x_1)(x_1-e_1^{i_1})(x_1-e_1^{i_1+1})+\\&K_2(x_2)(x_2-e_2^{i_2})(x_2-e_1^{i_2+1})\end{aligned} \tag{17}$$

这里 $K_1(x_1)$ 和 $K_2(x_2)$ 是二次连续可微的函数, 再定义

$$\begin{aligned}\phi(s,t)=&g(s,t)-f(s,t)-K_1(x_1)(s-e_1^{i_1})(s-e_1^{i_1+1})-\\&K_2(x_2)(t-e_2^{i_2})(t-e_2^{i_2+1})\end{aligned} \tag{18}$$

利用中值定理, 我们有 $K_1(x_1)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2g}{\partial x_1^2}|_{s=\xi,t=e_2^{i_2}}$, $K_2(x_2)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2g}{\partial x_2^2}|_{s=e_1^{i_1},s=\eta}$. 这里, $\xi\in(e_1^{i_1},e_1^{i_1+1})$, $\eta\in(e_2^{i_2},e_2^{i_2+1})$ 是分别与 x_1,x_2 相关的参数. 经整理定理 5 得证. □

若论域 U 采用标准二次多项式及三角函数模糊划分, 我们有定理 6 和定理 7.

定理 6. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准二次多项式模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\begin{aligned}\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\le&\frac{1}{8}\left[\|\frac{\partial^2g}{\partial x_1^2}\|_\infty+\|\frac{\partial^2g}{\partial x_2^2}\|_\infty\right]h^2+\\&\frac{1}{4}\left[\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\|_\infty+\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\|_\infty\right]h\end{aligned} \tag{19}$$

其余条件同定理 5.

定理 7. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准三角函数模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^2)$ 是一个在 U 上的二次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\begin{aligned}\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty \quad &\leq \frac{1}{8}\left[\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}\|_\infty+\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}\|_\infty\right]h^2+\\ &\frac{\pi^2}{32}\left[\|\frac{\partial g}{\partial x_1}\|_\infty+\|\frac{\partial g}{\partial x_2}\|_\infty\right]h \end{aligned}\tag{20}$$

其余条件同定理 5.

定理 6 和定理 7 的证明同定理 5, 故略. 然而, 上述结果受限于两个输入的情况, 我们自然想到把上述结果推广到 $n(n>2)$ 个输入的情形. 下面就给出相关的结论.

推论 1. 设论域 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准三角形模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n)$ 是一个在 U 上的 n 次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\leq\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\|_\infty h_i^2\tag{21}$$

其余条件同定理 5.

推论 2. 设论域 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准二次多项式模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n)$ 是一个在 U 上的 n 次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\leq\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\|_\infty h_i^2+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial g}{\partial x_i}\|_\infty h_i\tag{22}$$

其余条件同定理 5.

推论 3. 设论域 U 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个紧集, $A_j^{i_j}(x_j)$ 是满足完备性、一致性和有序性的一组标准三角函数模糊划分, $g(\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{X}\in\mathbf{R}^n)$ 是一个在 U 上的 n 次连续可微函数, 那么它们的误差界都满足下式

$$\|g(\boldsymbol{X})-f(\boldsymbol{X})\|_\infty\leq\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}\|_\infty h_i^2+\frac{\pi^2}{32}\sum_{i=1}^{n}\|\frac{\partial g}{\partial x_i}\|_\infty h_i\tag{23}$$

其余条件同定理 5.

推论 1 $\sim$ 3 的证明同二维输入的情况类似, 故略. 从对上述定理内容的分析可以看到, 无论是对单输入单输出标准模糊系统, 还是多输入单输出标准模糊系统, 以正规三角形为基函数的标准模糊系统的误差界具有二阶精度, 而其余两类模糊系统其逼近误差解都是一阶, 不具备更高的逼近精度. 因而, 以正规三角形为基函数的标准模糊系统是三个系统中逼近效果最好的. 对于正规二次多项式和正规三角函数为基函数的标准模糊系统来讲, 两个系统在单输入单输出情形下具有相同的一阶误差界公式 (6), 从误差界公式 (11) 和 (12) 分析, 两个系统都具有高于一阶而低于二阶的误差界, 以正规二次多项式为基函数的标准模糊系统的误差界稍小于以正规三角函数为基函数的误差界. 两个系统在多输入单输出情形下可参考式 (13)、(14)、(19) 及 (20), 结论与单输入、单输出的标准模糊系统是一样的. 总之, 以正规二次多项式为基函数的标准模糊系统的逼近效果比以正规三角函数为基函数的标准模糊系统稍好. 同时, 随着模糊系统输入维数的增加, 这两个系统的误差越来越大. 因而, 我们认为在低维输入情况下这三个模糊系统都是可以使用的, 在高维输入的情况下由于误差增加较快, 应当使用正规三角形为基函数的标准模糊系统而其余两个系统慎用. 另外, 上述定理的证明方法不同于文献 [10−11], 它的好处是可以处理非标准三角形函数划分的模糊系统的误差分析, 获得更多的模糊系统的信息. 下面通过算例来验证上述分析的正确性.

3 算例

例 1. 设计一个单输入单输出模糊系统, 使它一致逼近函数 $g(x)=0.1x^2+0.2x+0.5$, 其中论域 $U=[-1,1]$, 逼近的误差精度为 $\epsilon=0.1$. 这里, 我们对以正规三角形为基函数的标准模糊系统采用具有二阶形式的误差界公式 (6), 对以正规的二次多项式及三角函数为基函数的标准模糊系统采用具有近似二阶形式的式 (11)、(12) 进行计算, 其结果如表 1 所示. 因而, 对单输入单输出模糊系统这三个模糊系统都可以使用, 其中正规三角形隶属函数设计的模糊系统最好. 而对余下的两个模糊系统, 从误差界公式分析正规二次多项式模糊系统稍好于正规三角函数模糊系统, 但两者差别不大.

表 1 单输入单输出系统所需要的规则数目

Table 1 The number of rules in SISO systems

论域划分	三角形划分	多项式划分	三角函数划分
规则数目	3	4	4

例 2. 设计一个两输入单输出模糊系统, 使它一致逼近函数 $g(\boldsymbol{x})=0.25x_1^2+0.15x_2^2+0.1x_1x_2+0.40$, 其中论域 $U=[-1,1]\times[-1,1]$, 逼近精度为 $\epsilon=0.1$. 这里, 我们对以正规三角形为基函数的标准模糊系统采用具有二阶形式的误差界公式 (14), 对以正规的二次多项式与三角函数为基函数的标准模糊系统采用具有近似二阶形式的式 (19)、(20) 进行计算, 其结果如表 2 所示. 很明显, 在二维输入情形下正规三角形隶属函数设计的模糊系统效果最好, 采用正规二次多项式设计的模糊系统也明显优于采用正规三角函数设计的模糊系统, 这与一维输入情形有很大不同. 因而在高维模糊系统中, 我们建议更应该采用正规三角形隶属函数设计的模糊系统.

表 2 多输入单输出系统所需要的规则数目

Table 2 The number of rules in MISO systems

论域划分	三角形划分	多项式划分	三角函数划分
规则数目	9	49	64

4 结论

在标准模糊系统的基础上, 本文提出了三类标准模糊系统的比较问题. 通过数值分析中的误差余项和辅助函数的方法, 给出了上述三类模糊系统从单输入单输出到多输入单输出的逼近精度误差界的相关定理, 并对它们逼近精度的误差进行了比较研究, 提出了它们的使用条件, 这对实际应用是有益的. 同时, 在定理的证明过程中采用的误差余项和辅助函数方法的好处是可以比较模糊论域划分函数的优劣, 更多地揭示了模糊论域划分函数的信息, 并且该证明方法比文献

[10−11] 给出的方法更简捷. 最后, 我们通过算例比较了三类模糊系统的优劣, 验证了理论分析的正确性. 然而, 本文仅讨论了具有特殊的模糊划分和模糊推理方法得到的两类模糊系统的误差精度问题, 误差精度也仅限定在二阶以内. 我们对其他如采用最小推理方法和中心平均解模糊器形成的模糊系统以及最大推理方法和中心平均解模糊器形成的模糊系统没有给予研究, 同时也没有对应用广泛的采用高斯模糊划分得到的模糊系统给予重视. 另外, 本文所讨论的三类模糊系统在实际问题中对不同对象如何使用, 本文都没有涉及, 这些工作都是今后需要研究的.

References

1 Buckley J J. Universal fuzzy controllers. *Automatica*, 1992, **28**(6): 1245−1248

2 Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 1993, **53**(3): 299−303

3 Kosko B. Fuzzy systems as universal approximation. In: Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego, USA: IEEE, 1992. 1153−1162

4 Castro J L. Fuzzy logic controllers are universal approximators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1995, **25**(4): 629−635

5 Castro J L. Fuzzy systems with defuzzification are universal approximators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1996, **26**(1): 149−152

6 Wang L X. Fuzzy systems are universal approximator. In: Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems. San Diego, USA: IEEE, 1992. 1163−1170

7 Wang L X, Meddel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares learning. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, **3**(5): 807−814

8 Wang L X. Universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 1998, **9**(3): 223−230

9 Wei C, Wang L X. A note on universal approximation by hierarchical fuzzy systems. *Information Sciences*, 2000, **123**(3-4): 241−248

10 Zeng X J, Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems — SISO case. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1994, **2**(2): 162−176

11 Zeng X J, Singh M G. Approximation theory of fuzzy systems — MIMO case. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1995, **3**(2): 219−235

12 Zeng X J, Singh M G. Approximation accuracy analysis of fuzzy systems as function approximator. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, **4**(1): 44−63

13 Hao Y. Sufficient conditions on general fuzzy systems as function approximators. *Automatica*, 1994, **30**(3): 521−525

14 Hao Y. Necessary conditions for some typical fuzzy systems as function approximations. *Automatica*, 1997, **33**(3): 1333−1338

15 Hao Y. General Takagi-Sugeno fuzzy systems with simplified linear rule consequent are universal controllers, models and filters. *Information Sciences*, 1998, **108**(1-4): 91−107

16 Yager R R, Kreinovich V. Universal approximation theorem for uninorm-based fuzzy systems modeling. *Fuzzy Sets and Systems*, 2003, **140**(2): 331−339

17 Li Y M, Shi Z K, Li Z H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications — SISO cases. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **130**(2): 147−157

18 Li Y M, Shi Z K, Li Z H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications — MIMO cases. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **130**(2): 159−174

19 Hassine R, Karray F, Alimi A M, Selmi M. Approximation properties of piece-wise parabolic functions fuzzy logic systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 2006, **157**(4): 501−515

20 Zeng X J, Keane J A. Approximation capabilities of hierarchical fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, **13**(5): 659−672

21 Torra V. A review of the construction of hierarchical fuzzy systems. *International Journal of Intelligent Systems*, 2002, **17**(8): 531−543

22 Joo M G, Lee J S. Universal approximation by hierarchical fuzzy system with constraints on the fuzzy rule. *Fuzzy Sets and Systems*, 2002, **130**(2): 175−188

23 Liu P Y, Li H X. Hierarchical TS fuzzy system and its universal approximation. *Information Sciences*, 2005, **169**(3-4): 279−303

24 Moon B S. A practical algorithm for representing polynomials of two variables by fuzzy systems with accuracy. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, **119**(6): 321−327

陈 刚 大连海事大学数学系教授. 主要研究方向为模糊推理与模糊控制、复杂系统的预测与控制、知识挖掘. E-mail: cglfx@163.com
(**CHEN Gang** Professor at Dalian Maritime University. His research interest covers fuzzy reason and fuzzy control, forecast and control of complicated system, and knowledge mining.)