

# 欠驱动柔性机器人的振动可控性分析

陈炜<sup>1,2</sup> 余跃庆<sup>1</sup> 张绪平<sup>1</sup> 苏丽颖<sup>1</sup>

**摘要** 欠驱动柔性机器人的可控性分析是对其进行有效控制的关键问题. 本文以具有柔性杆的 3DOF 平面欠驱动机器人为例, 分两步分析系统的可控性. 首先, 忽略杆件的弹性变形, 研究欠驱动刚性系统在不同驱动电机位置的状态可控性; 然后, 考虑柔性因素, 研究欠驱动柔性系统的结构振动可控性. 结果表明振动可控性是随机器人关节位形和驱动电机位置而变化的, 并且欠驱动刚性机器人的状态可控性对相应的柔性系统的振动可控性有很重要的影响. 最后, 将上述研究方法扩展到具有一个被动关节的  $N$  自由度平面欠驱动柔性机器人.

**关键词** 欠驱动, 柔性杆, 振动可控性

**中图分类号** TP24

## Vibration Controllability of Underactuated Flexible Manipulator

CHEN Wei<sup>1,2</sup> YU Yue-Qing<sup>1</sup> ZHANG Xu-Ping<sup>1</sup> SU Li-Ying<sup>1</sup>

**Abstract** The controllability analysis of underactuated flexible manipulator is a key problem to efficiently control the systems. In this paper, a 3DOF underactuated planar manipulator with flexible links is taken an example and its controllable analysis is performed by two steps. Firstly, the state controllability of the rigid systems is investigated at the different actuator placements regardless of the elastic deformations of links. Then, the structural vibration controllability of the flexible system is studied based on the discussion above. It is shown that the vibration controllability of underactuated flexible manipulators is both joint configuration-dependent and actuator placement-dependent. Moreover, the state controllability of underactuated rigid robot has important influence on the vibration controllability of the corresponding flexible system. Finally, the method is extended to underactuated planar flexible manipulators system with  $N$  degrees of freedom and one passive joint.

**Key words** Underactuated, flexible link, vibration controllability

## 1 引言

为了使机器人满足轻质、低耗和高速等特性, 一方面人们尝试直接去掉关节的驱动装置, 研究含有被动关节的欠驱动机器人; 另一方面人们从机构设计角度出发, 研究具有柔性构件的柔性机器人. 目前, 国内外的研究在这两方面取得了大量有价值的成果, 欠驱动机器人和柔性机器人也逐渐发展为机器人研究领域的两个重要分支. 但是, 在机器人的实际应用中, 构件柔性和欠驱动两方面问题有可能

同时出现, 因此, 随着研究继续向纵深发展, 将会出现二者的结合, 即欠驱动柔性机器人的产生. 然而, 欠驱动或柔性任何一个因素的引入都会改变机器人的性质, 从而增大控制设计的难度, 甚至使机器人变为不可控系统.

系统的可控性是反映控制输入驾驭状态运动能力的重要概念. 全驱动刚性机器人的每个关节由单独的电机驱动, 系统在全工作空间是状态可控的<sup>[1]</sup>, 然而, 欠驱动机器人或柔性机器人却不再拥有这一特性. 首先, 欠驱动机器人大都属于非完整约束系统, 有效的控制策略是必不可少的, 而在控制过程中, 首先涉及的就是状态可控性分析问题. Mahindrakar<sup>[2]</sup> 证明了 3R 两输入水平欠驱动机器人的可控性, 说明除了关节 1 被动外, 其它情况都是小时间局部可控的 (Small-time local controllability, STLC). De Luca 等<sup>[3]</sup> 研究了具有  $n$  个转动关节和  $n-1$  个控制输入的欠驱动机器人的 STLC, 得出直接建立在系统惯性矩阵上的充分条件. Arai<sup>[4]</sup> 用输入轨迹证明平面 3R 第三被动关节欠驱动系统的可控性.

其次, 柔性机器人本质上是一个无穷维分布参数系统, 运动时其构件会产生弹性振动, 因此需要对其进行振动抑制. 然而对柔性系统来说, 其驱动装置

收稿日期 2005-11-8 收修改稿日期 2006-6-7

Received November 8, 2005; in revised form June 7, 2006

国家自然科学基金 (50575002), 北京市自然科学基金 (3062004), 北京市科技新星 B 类 (2003B04) 项目, 北京市属市管高等学校人才强教计划, 北京市教委科技发展计划 (KM200610005003) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (50575002), Natural Science Foundation of Beijing City (3062004), Beijing Novel Program B (2003B04), Funding Project for Academic Human Resources Development in Institutions of Higher Learning Under the Jurisdiction of Beijing Municipality, Beijing Education Committee Funding Project (KM200610005003)

1. 北京工业大学机械工程与应用电子技术学院 北京 100022 2. 天津理工大学机械工程学院 天津 300191

1. The College of Mechanical Engineering & Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100022  
2. School of Mechanical Engineering, Tianjin University of Technology, Tianjin 300191

DOI: 10.1360/aas-007-0391

数目与刚性系统相同, 系统可能存在驱动输入不能影响某些振动模态的情形<sup>[5]</sup>, 这时系统的结构振动是不完全可控的. 因此, 为了保证系统的稳定性, 首先需要进行振动可控性分析. Balas<sup>[6]</sup> 最早提出柔性机器人的振动可控性概念. 继而, López-Linares<sup>[5]</sup> 证明柔性机器人的振动可控性是依赖于关节位形的, 说明在振动不可控位形, 所有的驱动输入都不能影响机械臂的至少一个振动模态. Konno<sup>[7, 8]</sup> 分析了空间柔性机械臂的结构振动可控性, 提出模态可达性概念, 说明若某一特定模态的可达性很小, 相应的振动模态将很难控制.

由上述分析可知, 状态可控性和振动可控性分析对欠驱动机器人和柔性机器人控制的重要性, 但是, 目前的研究只分别在两个单独的领域展开. 本文将这一研究进行扩展, 分析具有柔性杆欠驱动机器人的可控性. 但是, 就本文的研究对象来说, 状态可控性和振动可控性分析是密切相关的, 需要同时予以讨论. 因为若不满足状态可控性, 机器人不能实现轨迹运动, 则无从谈及振动可控性; 若不满足振动可控性, 即使是状态可控的, 系统依然不能稳定工作. 然而, 在分析机器人系统的可控性时, 若同时考虑欠驱动和柔性两个因素, 一方面增加了分析的难度, 另一方面, 现有的方法还不够完善. 鉴于此, 本文提出一个简单可行的方法, 即先忽略杆件的弹性变形, 研究欠驱动刚性系统在不同驱动电机位置的状态可控性; 之后, 再计入柔性杆件的影响, 详细讨论系统在各种驱动位置的振动可控性.

## 2 欠驱动柔性机器人的动力学模型

如图 1 所示的平面  $n$  自由度欠驱动柔性机器人,  $n$  个转动关节中  $m(m < n)$  个关节是主动的,  $n - m$  个是被动的. 图中填充黑色的表示主动关节, 未填充的表示被动关节. 采用假设模态法建立具有柔性杆的欠驱动机器人的动力学模型<sup>[9]</sup> 为

$$\begin{bmatrix} D_{aa}(\mathbf{q}) & D_{ap}(\mathbf{q}) & D_{af}(\mathbf{q}) \\ D_{pa}(\mathbf{q}) & D_{pp}(\mathbf{q}) & D_{pf}(\mathbf{q}) \\ D_{fa}(\mathbf{q}) & D_{fp}(\mathbf{q}) & D_{ff}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_p \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ b_p(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ b_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_p \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_f \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_a \ \mathbf{q}_p \ \mathbf{q}_f]^T \in R^{N \times 1}$ ,  $\mathbf{q}_a \in R^{m \times 1}$  为主动关节角变量,  $\mathbf{q}_p \in R^{(n-m) \times 1}$  为被动关节角变量,  $\mathbf{q}_f$  为柔性杆弹性广义坐标阵列, 维数为  $N - n$ ;  $K_f \in R^{(N-n) \times (N-n)}$  为刚度矩阵, 是对角阵;  $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_a \ \mathbf{0} \ \mathbf{F}_f]^T$ ,  $\boldsymbol{\tau}_a \in R^{m \times 1}$  为主动关节的驱动力矩,  $\mathbf{F}_f$  为弹性广义坐标对应的广义力列阵, 设式 (1) 中的  $\mathbf{q}_a$ 、 $\mathbf{q}_p$  描述关节的相对运动, 则  $\mathbf{F}_f$  的所有元素

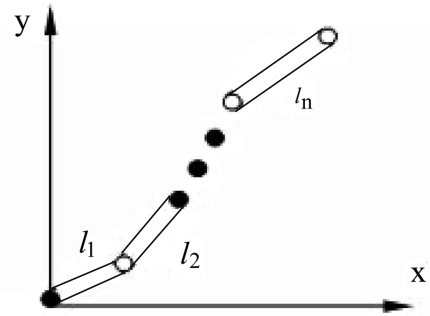


图 1 平面欠驱动机器人

Fig. 1 The planar underactuated robot

为 0. 下面以杆 3 柔性的平面 3DOF 欠驱动机器人为例, 分析系统的状态可控性和振动可控性. 根据驱动输入位置的不同, 此机器人对应着 3 个控制系统, 用符号分别表示为  $\bar{R}RR$ 、 $RR\bar{R}$  和  $RR\bar{R}$ , 其中  $R$  表示主动关节,  $\bar{R}$  表示被动关节. 按照第 1 节的分析思路, 首先忽略机器人动力学模型的弹性部分, 分析欠驱动刚性机器人的状态可控性, 然后在此基础上, 考虑弹性部分, 分析柔性系统的振动可控性.

## 3 3DOF 欠驱动刚性机器人的状态可控性

系统的状态可控性分为线性可控性和非线性可控性. 若线性系统有一点可控, 则所有的点都可控. 理论上已证明, 当欠驱动机器人存在重力势能或被动自由度处有弹性势能或摩擦力时, 系统在平衡点是线性可控的<sup>[10~12]</sup>, 但是, 这时的可控性不存在全局性和等价关系, 只是局部可控的. 由于大部分欠驱动机器人系统都不满足线性可控性, 因此, 需要采用非线性局部可控性判定方法, 如 STLC 方法等. 下面首先了解若干可控性的定义.

### 3.1 定义<sup>[2,13~15]</sup>

考虑如下非线性仿射系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  为光滑流形  $M$  的局部坐标,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  分别为漂移向量和输入向量场. 此时系统可表达为  $\Sigma = (M, F = \mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_m, U)$ , 其可控性问题就是确定一定的区域或点集  $K$ , 使系统能在适当的控制作用下, 满足轨迹从某一初始点经过一定时间运动到  $K$  的某一指定点.

**定义 1.** 当且仅当对每个  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_T \in M$  和所有的  $T \geq 0$ , 都存在一个允许的输入  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow U$ , 并满足  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T$ , 那么非线性系统 (2)

是可控的. 定义

$$\varepsilon = \{(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \in M \times R^m : \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{g}_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = 0\}$$

为平衡点的集合, 令  $(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e) \in \varepsilon$  为系统 (2) 的平衡点, 将其线性化

$$\dot{Z} = AZ + B\boldsymbol{\nu} \quad (3)$$

式中,

$$A = \left. \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)} \\ = \left\{ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right\} \Big|_{(\mathbf{x}^e, \mathbf{u}^e)}$$

$$B = \mathbf{g}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^e} = [\mathbf{g}_1(\mathbf{x}^e) \quad \mathbf{g}_2(\mathbf{x}^e) \quad \cdots \quad \mathbf{g}_m(\mathbf{x}^e)]$$

且  $Z = \mathbf{x} - \mathbf{x}^e$ ,  $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^e$ . 则当且仅当  $\text{rank}(C) = \text{rank}[B \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B] = 2n$  时, 系统 (2) 在平衡点是线性可控的. 若线性系统 (3) 在每个平衡点都是可控的, 则系统 (2) 是线性可控的.

由于大多数欠驱动机器人系统不具有线性可控性, 因此, 继续给出非线性局部可控性定义. 设控制系统 (2) 从  $\mathbf{x}_0$  出发并在  $T$  时刻内能到达的集合定义为  $\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0, T)$ , 同时在  $[0, T]$  定义能达状态集合  $\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0, \leq T) = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \text{Reach}^V(\mathbf{x}_0, t)$  和

$$\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0) = \bigcup_{t>0} \text{Reach}^V(\mathbf{x}_0, t).$$

**定义 2.** 令  $\mathbf{x}_0 \in M, \text{int}(U)$  为集合  $U$  的内部, 有

1) 若  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0))$ , 则系统是局部可控的.

2) 若存在  $T > 0$ , 对  $t \in (0, T]$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \text{int}(\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0, \leq 0))$ , 则  $\sum$  自  $\mathbf{x}_0$  是 STLC 的.

3) 若  $\text{int}(\text{Reach}^V(\mathbf{x}_0)) = M$ , 则  $\sum$  自  $\mathbf{x}_0$  是全局可控的.

### 3.2 线性可控性分析

对 3DOF 欠驱动机器人来说, 首先考虑关节 3 被动的情况, 将方程 (1) 中的柔性项和刚柔耦合项去掉, 3DOF 欠驱动刚性机器人系统的动力学模型为

$$\begin{bmatrix} D_{11}(\mathbf{q}_r) & D_{12}(\mathbf{q}_r) & D_{13}(\mathbf{q}_r) \\ D_{21}(\mathbf{q}_r) & D_{22}(\mathbf{q}_r) & D_{23}(\mathbf{q}_r) \\ D_{31}(\mathbf{q}_r) & D_{32}(\mathbf{q}_r) & D_{33}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \\ b_2(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \\ b_3(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

式中,  $\mathbf{q}_r = [\mathbf{q}_a \quad \mathbf{q}_p]^T$  (下标 r 表示刚性). 设主动关节加速度为控制输入, 运用部分反馈线性化控制方法, 将 (4) 式转换为

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_1 = u_1 & \ddot{\mathbf{q}}_2 = u_2 \\ \ddot{\mathbf{q}}_3 = J(\mathbf{q}_r)\mathbf{u} + R(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \end{cases} \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2]^T$

$$J(\mathbf{q}_r) = [J_1(\mathbf{q}_r) \quad J_2(\mathbf{q}_r)] = -D_{33}^{-1} \cdot [D_{31} \quad D_{32}]$$

$$R(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) = -D_{33}^{-1} \cdot b_3(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r)$$

式 (5) 满足  $D_{33} \neq 0$ . 设  $(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) = (\mathbf{q}_r^e, 0)$  为 (5) 的平衡解, 则在平衡位形  $\mathbf{q}_r^e$  有  $R(\mathbf{q}_r, 0) = 0$ . 定义状态向量  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \dot{\mathbf{q}}_1, \dot{\mathbf{q}}_2, \dot{\mathbf{q}}_3\}$ , 则系统状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})u_1 + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})u_2 \quad (6)$$

式中,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_4, x_5, x_6, 0, 0, R(\mathbf{x}))^T$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}) = (0, 0, 0, 1, 0, J_1(\mathbf{x}))^T$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}) = (0, 0, 0, 0, 1, J_2(\mathbf{x}))^T$$

状态空间流形为  $M = S^1 \times S^1 \times S^1 \times R^3$ . 按照式 (3) 计算系统 (6) 关于平衡点  $(\mathbf{x}^e, 0)$  的  $A$ 、 $B$  矩阵, 得状态可控性矩阵的秩  $\text{rank}(C) = 4 < 6$ , 显然系统 (6) 在任何平衡点都不是线性可控的.

### 3.3 局部可控性分析

下面根据定义 2, 讨论系统 (6) 的局部可控性, 证明系统在平衡点满足 STLC 必要和充分条件. 首先, 考虑分布

$$E(\mathbf{x}) = \text{span}\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1], [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2], [\mathbf{f}, [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]], [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]]]\}$$

可以证明对任何的  $(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) \in M$ , 此分布可张成一个六维空间, 因此系统 (6) 是局部可达的<sup>[14]</sup>.

下面给出 STLC 必要和充分条件. 对系统 (2) 来说, 定义矢量场的集合序列

$$G_1 = \{\mathbf{g}_i, i = 1, \cdots, m\}$$

$$G_k = \{[X, [\mathbf{f}, Y]], X \in G_i, X \in G_j, k = i + j\}, k \geq 2$$

$$G = \bigcup_{i \geq 2} G_i$$

若存在整数  $k^* \geq 2$ , 满足

$$\dim(\text{span}\{X(\mathbf{x}^e), X \in \bigcup_{i=2}^{k^*} G_i\}) = n - m \quad (7)$$

那么系统在平衡点  $\mathbf{x}^e$  是强可达的, 即系统在平衡点  $\mathbf{x}^e$  满足 STLC 的必要条件. 另外, 令  $B_r(X)$  表示包含  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_m$  矢量场的最小李代数,  $B$  表示  $B_r(X)$  中的任意括号,  $\delta^0(B), \delta^1(B), \cdots, \delta^m(B)$  指  $\mathbf{f}, \mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_m$  各自出现在括号中的次数. 对不

含摩擦力及重力势能的欠驱动机械系统<sup>[14]</sup>, 凡满足  $\sum_{i=1}^m \delta^i(B) - \delta^0(B) = 0$  的括号为好括号 (Good bracket); 满足  $\sum_{i=1}^m \delta^i(B) - \delta^0(B) = 1$ , 且  $\delta^0(B)$  为奇数,  $\delta^i(B)$  为偶数的括号为坏括号 (Bad bracket). 若所有的坏括号可以写成  $G$  中所含坏括号的线性组合, 那么, 应用 Bianchini 和 Stefani 条件, 可以得到系统在平衡点 STLC 的充分条件<sup>[15~17]</sup>.

**定理 1.** 由式 (6) 定义的系统在平衡点满足 STLC 的充分和必要条件.

**证明.** 计算式 (6) 的下列李代数

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}_1](\mathbf{x}) = (-1, 0, -J_1(\mathbf{x}), 0, 0, *)^T$$

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}_2](\mathbf{x}) = (0, -1, -J_2(\mathbf{x}), 0, 0, *)^T$$

$$[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]](\mathbf{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, \beta_1(\mathbf{x}))^T$$

$$[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]](\mathbf{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, \beta_2(\mathbf{x}))^T$$

$$[\mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]](\mathbf{x}) = (0, 0, 0, 0, 0, \beta_3(\mathbf{x}))^T$$

这里,  $\beta_1(\mathbf{x})$ ,  $\beta_2(\mathbf{x})$  和  $\beta_3(\mathbf{x})$  都是不为零的表达式.

由上述理论知, 集合  $G = \{[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]], [\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]], [\mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]\}$  中的  $[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_1]]$  和  $[\mathbf{g}_2, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]$  是坏括号, 应用条件 (7) 得  $\dim(\text{span}\{[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]](\mathbf{x}^e)\}) = 1$ , 显然, 对所有的  $x_2 \in S^1 \setminus \{x_2 = n_1\pi, n_1 = 0, \pm 1, \dots\}$  和  $x_3 \in S^1 \setminus \{x_3 = n_2\pi, n_2 = 0, \pm 0.5, \pm 1, \dots\}$ ,  $G$  中的坏括号可以表示成  $[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]]$  在平衡点  $\mathbf{x}^e$  处的线性组合, 因此, 系统 (6) 在平衡点满足 STLC 的充分条件和必要条件. 这时可以说, 3DOF 欠驱动机器人的 RR $\bar{R}$  系统在平衡点附近, 且在有限的时间内, 通过控制的作用, 可以找到一条轨迹, 满足从任意起始点出发, 到任意终点结束.  $\square$

同理, 按照上述分析方法, 可以判别 3DOF 欠驱动刚性机器人 RRR 和  $\bar{R}RR$  系统的状态可控性. 显然 RRR 和  $\bar{R}RR$  系统都不是线性可控的, 但 RRR 系统满足 STLC 充分和必要条件; 而对  $\bar{R}RR$  系统来说, 由于  $[\mathbf{g}_1, [\mathbf{f}, \mathbf{g}_2]] = 0$ , 不满足条件 (7), 因此,  $\bar{R}RR$  系统不是 STLC 的.

#### 4 3DOF 欠驱动柔性机器人的振动可控性

柔性构件在运动中产生的高频弹性振动, 不但影响末端的定位精度, 甚至可能导致整个系统失稳, 造成误操作. 因此, 为了实现柔性系统的可靠操作, 仅仅满足刚性系统的状态可控性是不够的, 还需要进一步研究系统的振动可控性. 这里提出的刚性系统分析基础上的振动特性研究, 是对欠驱动柔性机器人的振动可控性分析的一个新途径. 目前, 有关全驱动柔性机器人振动可控性的研究方法都是引入若干假设, 将系统模型简化为线性的, 然后利用可控性矩阵进行判定. 虽然经过简化后的模型不能全面地反映柔性系统的本质特征, 但是此基础上的关于结构振动定性和定量的分析对振动控制策略的确定

是十分有指导意义的. 下面在对第 2 节欠驱动刚性系统不同驱动输入情况下状态可控性分析的基础上, 计入柔性杆件弹性广义坐标的影响, 详细讨论欠驱动柔性机器人系统在各种驱动输入位置的振动可控性.

##### 4.1 振动可控性矩阵

对 (1) 所描述的具有柔性杆的欠驱动机器人, 假设对其第  $i$  柔性杆的振型函数截取前  $k_i$  阶, 系统所有的弹性广义坐标的维数为  $l = \sum_{i=1}^n k_i$ . 将动力学模型 (1) 第 2 式改写为

$$\dot{\mathbf{q}}_p = -D_{pp}^{-1}(D_{pa}\dot{\mathbf{q}}_a + D_{pf}\dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{b}_p) \quad (8)$$

代入式 (1) 的第 1 式和第 3 式, 组成新的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M_{aa}(\mathbf{q}) & M_{af}(\mathbf{q}) \\ M_{fa}(\mathbf{q}) & M_{ff}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{h}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{h}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

其中,

$$\begin{cases} M_{aa}(\mathbf{q}) = (D_{aa} - D_{ap}D_{pp}^{-1}D_{pa}) \\ M_{af}(\mathbf{q}) = (D_{af} - D_{ap}D_{pp}^{-1}D_{fa}) \\ M_{fa}(\mathbf{q}) = (D_{fa} - D_{fp}D_{pp}^{-1}D_{pf}) \\ M_{ff}(\mathbf{q}) = (D_{ff} - D_{fp}D_{pp}^{-1}D_{pf}) \\ \mathbf{h}_a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{b}_a - D_{ap}D_{pp}^{-1}\mathbf{b}_p) \\ \mathbf{h}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{b}_f - D_{fp}D_{pp}^{-1}\mathbf{b}_p) \end{cases} \quad (10)$$

方程 (9) 的第 1 式表示欠驱动柔性机器人全部主动关节的运动情况, 而第 2 式则表示柔性杆件的弹性变形运动情况. 当  $\ddot{\mathbf{q}}_a = \dot{\mathbf{q}}_a = 0$  和  $\ddot{\mathbf{q}}_f = \dot{\mathbf{q}}_f = 0$  时, 弹性广义坐标  $\mathbf{q}_f$  为零.

为了对复杂柔性系统的振动可控性展开分析, 现引入两个假设条件<sup>[7, 8]</sup>: 1) 仅考虑系统的静态特性, 忽略系统的离心力和哥氏力,  $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ , 认为惯性矩阵对时间的导数  $\dot{M}(\mathbf{q}) = \dot{M}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_f) = 0$ ; 2) 假设在惯性矩阵中, 弹性变形  $\mathbf{q}_f$  的影响很小, 将其忽略, 有  $M(\mathbf{q}) = M(\mathbf{q}_r) = 0$ . 这时, 欠驱动柔性机器人的近似方程为

$$\begin{bmatrix} M_{aa}(\mathbf{q}) & M_{af}(\mathbf{q}) \\ M_{fa}(\mathbf{q}) & M_{ff}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

给定主动关节角的位形  $\mathbf{q}_a$ , 有

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} = -M^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_a \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} + M^{-1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

式中,  $M^{-1} = \begin{bmatrix} (M^{-1})_{aa} & (M^{-1})_{af} \\ (M^{-1})_{fa} & (M^{-1})_{ff} \end{bmatrix}$ . 方程 (12) 的第 2 式表达了  $\dot{\mathbf{q}}_f$  和  $\boldsymbol{\tau}_a$  的关系, 由此可以研究系统

的振动可控性, 展开式 (12) 的第 2 式, 并写成状态方程形式为

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff}K_f \\ I_{l \times l} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_f \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (M^{-1})_{fa} \\ 0 \end{pmatrix} \tau_a \quad (13)$$

简化得

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{B}\tau_a \quad (14)$$

这里,  $\dot{\mathbf{Z}} = [\mathbf{q}_f \ \dot{\mathbf{q}}_f]^T$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff}K_f \\ I_{l \times l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (M^{-1})_{fa} \\ 0 \end{bmatrix}$$

若振动可控性矩阵的秩  $\text{rank}(\Gamma) = [B \ AB \ \dots \ A^{2l-1}B] < 2l$ , 说明系统某些结构振动是不可控的. 通常  $A$ 、 $B$  都是  $\mathbf{q}$  的函数, 因此, 矩阵  $\Gamma$  也是依赖于关节位形的; 而对欠驱动机器人系统,  $A$ 、 $B$  还随驱动输入的不同而变化, 这时, 矩阵  $\Gamma$  还是依赖于驱动输入位置的.

## 4.2 振动可控性分析

仍然以式 (4) 所表示的杆 3 柔性的 3DOF 欠驱动机器人为例, 分析系统在各驱动装置位置的振动可控性. 首先考虑关节 3 被动的情况, 假设 RRR 系统不受外界负载, 则杆 3 两端的边界条件为简支—自由, 截取振型的第一阶模态, 即  $l = 1$ , 其动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M_{11}(\mathbf{q}_r) & M_{12}(\mathbf{q}_r) & M_{13}(\mathbf{q}_r) \\ M_{21}(\mathbf{q}_r) & M_{22}(\mathbf{q}_r) & M_{23}(\mathbf{q}_r) \\ M_{31}(\mathbf{q}_r) & M_{32}(\mathbf{q}_r) & M_{33}(\mathbf{q}_r) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

式中惯性矩阵是经过原始惯性矩阵的变换得到的, 它们之间的关系满足

$$M_{ij}(\mathbf{q}_r) = D_{ij}(\mathbf{q}_r) - D_{i3}(\mathbf{q}_r)D_{33}^{-1}(\mathbf{q}_r)D_{3j}(\mathbf{q}_r) \quad i, j = 1, 2, 3, f \quad (16)$$

按照式 (13), 将式 (15) 写成状态方程的形式为

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff}K_f \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_f \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (M^{-1})_{f1} & (M^{-1})_{f2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix}$$

$$\implies \dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{AZ} + \mathbf{B}\tau_a \quad (17)$$

其中,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (M^{-1})_{11} & (M^{-1})_{12} & (M^{-1})_{1f} \\ (M^{-1})_{21} & (M^{-1})_{22} & (M^{-1})_{2f} \\ (M^{-1})_{31} & (M^{-1})_{31} & (M^{-1})_{3f} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{Z}} = [\mathbf{q}_f \ \dot{\mathbf{q}}_f]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff}K_f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (M^{-1})_{f1} & (M^{-1})_{f2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

计算振动可控性矩阵, 有

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (M^{-1})_{f1} & (M^{-1})_{f2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (M^{-1})_{f1} & (M^{-1})_{f2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

由于  $M^{-1}$  是  $q_2$  和  $q_3$  的函数, 所以, 欠驱动柔性机器人的振动可控性矩阵  $\Gamma_1$  也是依赖于关节位形  $q_2$  和  $q_3$  的, 因此, 有必要计算系统在所有关节位形的振动可控情况, 以便找到振动不可控位形. 观察  $\Gamma_1$  可知, 当  $(M^{-1})_{f1} \neq (M^{-1})_{f2}$ , 且  $(M^{-1})_{f1} \neq 0$  和  $(M^{-1})_{f2} \neq 0$  时,  $\text{rank}(\Gamma_1) = 2$ , RRR 系统在平衡点附近是振动可控的.

计算  $\Gamma_1$  的最小奇异值, 可以定量观察振动可控性矩阵随关节位形的变化. 设  $q_2$  和  $q_3$  的运动区间都是  $0^\circ \sim 360^\circ$ , RRR 系统的详细参数如表 1 所示, 由于  $\Gamma_1$  的维数为  $2 \times 4$ , 计算得  $\Gamma_1$  在任何关节位形都有两个值相等的奇异值, 它的变化如图 2 所示. 可以看出,  $\Gamma_1$  的最小奇异值是随关节位形  $q_2$  和  $q_3$  而变化的,  $\Gamma_1$  在各个关节位形的奇异值都是大于零的, 说明系统没有振动不可控位形, 即柔性杆 3 的弹性振动都可由主动驱动力矩  $\tau_1$  和  $\tau_2$  来控制. 当  $q_3$  在  $90^\circ$  和  $270^\circ$  附近时, 也就是杆 3 与杆 2 处于垂直位置时, 图中的奇异值取得最小值.

同理, 对 RRR 系统来说, 关节 2 被动, 柔性杆 3 的边界条件为固定—自由, 按照上述方法可求得振动可控性矩阵  $\Gamma_2$ , 它也是依赖于关节位形  $q_2$  和  $q_3$  的函数, 维数为  $2 \times 4$ . 由于相应的刚性系统是 STLC 的, 因此当  $\text{rank}(\Gamma_2) = 2$  时, 系统在平衡点附近是振动可控的. 图 3 为系统可控性矩阵的最小奇异值曲面, 观察可知, 曲面的所有值都是正的, 说明系统可以由主动关节的力矩  $\tau_1$  和  $\tau_3$  来控制柔性杆 3 的振动.

另外, RRR 系统关节 3 被动, 柔性杆 3 的边界条件也为固定—自由, 按照上述同样的方法可以计算可控性矩阵  $\Gamma_3$ . 由第 3 节的分析可知, 由于刚性 RRR 系统在平衡点不满足 STLC, 即在平衡点附近, 不能通过控制的作用, 在有限的时间内, 找到一条从起始点出发, 到终点结束的轨迹. 因此, 这里计算的  $\text{rank}(\Gamma_3)$  值是不确定并且没有意义的, 系统在平衡点附近是振动不可控的, 即欠驱动柔性机器人不能由主动关节的力矩  $\tau_2$  和  $\tau_3$  控制柔性杆 3 的振动.

综上所述, 欠驱动柔性机器人的振动可控性不

表 1 3DOF 欠驱动柔性机器人的参数  
Table 1 Parameters of 3DOF underactuated flexible robot

	质量 (kg)			杆长 (m)			柔性杆 3				材料
	杆 1	杆 2	杆 3	杆 1	杆 2	杆 3	弹性模量 (MPa)	惯性矩 (mm <sup>4</sup> )	截面 1 (mm)	截面 2 (mm)	
符号	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$	$E$	$I$	$b$	$h$	铝
参数	1.0	1.0	0.1	0.5	0.5	0.5	$0.677 \times 10^5$	6.1728	74.1	1	

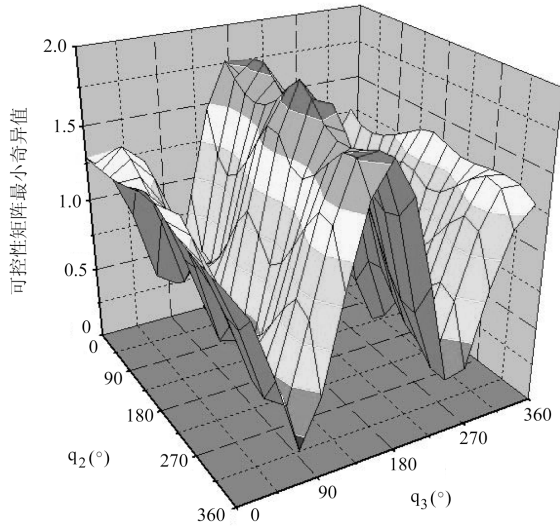


图 2 RR̄R 系统的振动可控性最小奇异值

Fig. 2 Minimum singular value of the vibration controllability matrix of RR̄R system

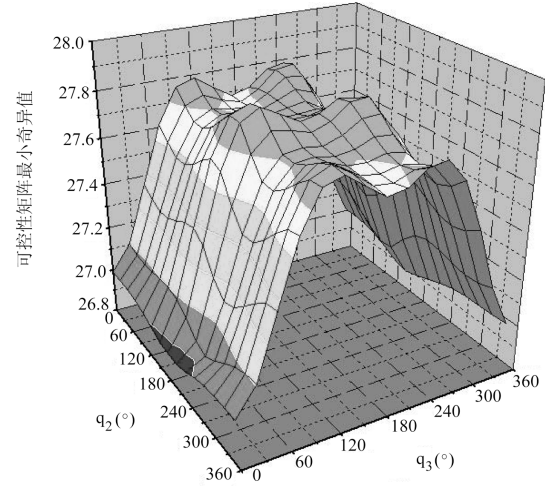


图 3 RRR 系统的振动可控性最小奇异值

Fig. 3 Minimum singular value of the vibration controllability matrix of RRR system

但依赖于关节位形, 同时也依赖于驱动输入位置. 而且, 欠驱动刚性机器人的可控性对相应柔性系统的振动可控性有着重要的影响, 当刚性系统不可控时, 相应的柔性系统的振动可控性是不确定且无意义的.

### 4.3 模态可达指标

将系统的状态方程 (13) 变换成如下规范形式

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_f^* \\ \ddot{\mathbf{q}}_f^* \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{l \times l} \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_f^* \\ \dot{\mathbf{q}}_f^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda \end{pmatrix} \tau_a \quad (19)$$

式中,  $\Omega = \xi^{-1}(M^{-1})_{ff}K_f\xi = -\text{diag}[\Omega_1, \dots, \Omega_l]$ ,  $\Lambda = \xi^{-1}(M^{-1})_{fa}$ , 其中  $\xi$  为  $(M^{-1})_{ff}K_f$  的特征向量矩阵,  $\Omega$  为  $(M^{-1})_{ff}K_f$  的特征值对角阵, 且  $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_l$ . 由于状态方程的变换不会影响系统的性质, 因此, 系统的振动可控性不变, 这时, 可控性矩阵为

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & \Omega\Lambda & 0 & \dots & \Omega^{2k-1}\Lambda \\ 0 & \Lambda & 0 & \Omega\Lambda & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

将式 (19) 的第二式展开, 有

$$\ddot{\mathbf{q}}_f^* = \Omega \cdot \mathbf{q}_f^* + \Lambda \cdot \tau_a \quad (21)$$

式 (21) 表达了每个弹性广义坐标及其加速度和输入力矩之间的关系. 在给定关节位形  $\mathbf{q}$ , 定义模态可达指标为

$$\alpha_i(\mathbf{q}) = \sqrt{\gamma_i \gamma_i^T} \quad (22)$$

式中,  $\gamma_i$  为矩阵  $\Lambda$  的第  $i$  行. 文献 [7] 对模态可达指标  $\alpha_i(\mathbf{q})$  物理意义的解释为: 若第  $i$  阶模态是不可达模态, 则相应的位形  $\mathbf{q}$  是第  $i$  阶模态不可达位形. 但这里的  $i$  应为状态方程中所对应的第  $i$  个弹性广义坐标, 而弹性广义坐标列阵  $\mathbf{q}_f$  的顺序是从基座开始, 按照对柔性杆选取模态的阶数顺次排列的. 因此, 若  $\Lambda$  的某行都是零, 则相应于这行的振动模态是不可控的, 即所对应的弹性广义坐标是振动不可控的,  $\mathbf{q}$  是它的不可达位形. 这里, 模态可达指标仍然可以看作一种模态可控性的边界, 即使系统是可控的, 如果某一特定模态的模态可达性很小, 相应的振动模态将很难控制<sup>[7]</sup>.

下面分析 3DOF 欠驱动机器人的 RR̄R 和 RRR 两个系统的模态可达指标变化情况. 由于柔性杆 3 只取第一阶模态, 矩阵  $\Lambda$  都是  $2 \times 1$  矩阵, 则求得的模态可达指标为一个数, 且刚好与可控性矩阵的奇异值相等, 图 2 和图 3 同时也表示了两个系统模态

可达指标随关节的变化. 比较两个图可知,  $R\bar{R}\bar{R}$  系统的值远大于  $RR\bar{R}$  系统的值, 说明对此 3DOF 两输入欠驱动柔性机器人来说,  $R\bar{R}\bar{R}$  系统比  $RR\bar{R}$  系统更加易于抑制柔性杆 3 的弹性振动.

## 5 含一个被动关节的 $N$ 自由度平面欠驱动柔性机器人的可控性分析

下面将上述可控性分析方法推广到含一个被动关节的  $N$  个自由度平面欠驱动柔性机器人. 首先分析相应刚性系统的状态可控性. Kobayash 等<sup>[18]</sup> 分三步对具有一个被动关节的  $N$  自由度平面欠驱动刚性机器人的可控性进行了分析: 首先, 以  $2R$  欠驱动机器人为例, 证明当关节 1 主动, 关节 2 被动, 即驱动输入为  $RR$  时, 系统是完全可控的, 当驱动输入为  $\bar{R}R$  时, 系统是不完全可控的; 接着, 将研究对象扩展到关节 1 驱动, 其余  $N-1$  个关节中一个关节被动的  $N$  自由度平面欠驱动机器人, 得到在此情况下系统是状态可控的; 最后, 证明关节 1 被动时,  $N$  自由度平面欠驱动机器人是不完全可控的. 因此, 可以得知对具有一个被动关节的  $N$  自由度平面欠驱动机器人来说, 除了关节 1 被动的系统不可控外, 其余, 不论哪个关节被动, 系统都是可控的.

基于上述结论, 这里给出具有一个关节被动的  $N$  个自由度平面欠驱动柔性机器人的振动可控性分析. 当机器人的所有杆件都是柔性的, 每个杆件都只取第一阶模态时, 根据第 4 节提出的两个假设条件, 系统的假设模态近似动力学方程为

$$\begin{bmatrix} D_{rr} & D_{rf} \\ D_{fr} & D_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_r \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

式中, 下标  $r$  代表刚性关节变量,  $f$  代表弹性坐标,  $\boldsymbol{\tau} = [\boldsymbol{\tau}_a \ \boldsymbol{\tau}_p]^T \in R^{N \times 1}$ ,  $K_f = \text{diag}(k_1 \ k_2 \ \dots \ k_N)$ .  $\lambda \in R^{N \times N}$ , 它近似于单位阵, 对应于被动关节的那一行元素全为零. 将被动关节变量用其它主动关节表示, 得

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{af} \\ M_{fa} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_a \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_r \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

式中,  $\mathbf{q}_a \in R^{(N-1) \times 1}$ ,  $\mathbf{q}_f \in R^{N \times 1}$ ,  $M \in R^{(2N-1) \times (2N-1)}$ ,  $\boldsymbol{\tau}_a \in R^{(N-1) \times 1}$ . 将式 (24) 转换成状态方程

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_f \\ \dot{\mathbf{q}}_f \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff} K_f \\ I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}_f \\ \mathbf{q}_f \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (M^{-1})_{fa} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{Z}} &= AZ + B\boldsymbol{\tau}_a \end{aligned} \quad (25)$$

式中,  $\dot{\mathbf{Z}} = [\mathbf{q}_f \ \dot{\mathbf{q}}_f]^T_{2N \times 1}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -(M^{-1})_{ff} K_f \\ I & 0 \end{bmatrix}_{2N \times 2N}$$

$$B = \begin{bmatrix} (M^{-1})_{fa} \\ 0 \end{bmatrix}_{2N \times (N-1)}$$

计算振动可控性矩阵

$$\Gamma_{(2N-1) \times [2N \times (N-1)]} = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{2N-1} B] \quad (26)$$

由上述讨论可知, 由于  $A, B$  都是关节角  $\mathbf{q}_r$  的函数, 则模态可控性矩阵  $\Gamma$  也是基于关节位形的, 同时随着驱动器位形的变化, 可控性矩阵  $\Gamma$  也是不同的. 由于欠驱动刚性机器人并不是在所有关节位形都完全可控的, 当关节 1 被动时, 系统就不满足 STLC, 即在此驱动输入位置, 矩阵  $\Gamma$  的秩是不确定的和无意义的, 其余情况则是可以通过计算矩阵  $\Gamma$  的秩来判断, 如果满足  $\text{rank}(\Gamma) = 2N$ , 相应的系统在平衡点是振动可控的, 即可以由主动关节的驱动力矩控制柔性杆的弹性振动.

## 6 结论

本文基于欠驱动柔性机器人假设模态动力学模型, 分两步分析系统完整可控性和振动可控性, 并以具有柔性杆的平面 3DOF 欠驱动机器人为例进行分析, 主要得出如下结论:

1) 欠驱动刚性机器人的可控性对相应的柔性系统的振动可控性有着重要的影响, 欠驱动柔性机器人的振动可控性是依赖于关节位形和驱动输入位置的. 当欠驱动刚性机器人可控时, 如果满足振动可控性矩阵条件, 那么相应的柔性系统是振动可控的; 而当欠驱动刚性机器人不可控时, 柔性系统的振动可控性是无意义的.

2) 在不同驱动器位置, 欠驱动柔性机器人振动可控性矩阵的最小奇异值变化直观体现柔性杆是否存在振动不可控位形; 相应的模态可达指标的大小则说明对振动控制的难易程度. 3DOF 欠驱动柔性机器人的仿真结果说明, 除特殊点外系统都不存在振动不可控位形, 比较 3DOF 欠驱动机器人的模态可达指标, 说明  $R\bar{R}\bar{R}$  系统比  $RR\bar{R}$  系统更加有利于抑制柔性杆 3 的弹性振动.

3) 将振动可控性方法推广到具有一个被动关节的  $N$  自由度欠驱动柔性机器人, 由于欠驱动刚性机器人在除关节 1 被动外的其它驱动输入位置系统都满足 STLC, 因此, 相应的柔性系统振动可控性在关

节 1 被动的系统是不确定的和无意义的, 其它系统若满足  $\text{rank}(T) = 2N$ , 系统是振动可控的, 即可以由主动关节的驱动力矩控制柔性杆的弹性振动。

## References

- 1 Tosunoglu S, Lin S H, Tesar D. Accessibility and controllability of flexible robotic manipulators. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1992, **1**(114): 50~58
- 2 Mahindrakar A D, Banavar R N. Controllability properties of a planar 3R underactuated manipulator. In: Proceedings of IEEE International Conference on Control Applications. 2002. **1**: 489~494
- 3 De Luca A, Iannitti S. A simple STLC test for mechanical systems underactuated by one control. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2002. **2**: 1735~1740
- 4 Arai H, Tachi S. Position control of a manipulator with passive joints using dynamic coupling. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1991, **7**(4): 528~534
- 5 Balas M. Feedback control of flexible systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1978, **23**(4): 673~679
- 6 López-Linares S, Konno A, Uchiyama M. Vibration suppression control of flexible robots using velocity inputs. In: Proceedings of the IEEE/RSJ/GI International Conference on Intelligent Robots and Systems '94. IEEE, 1994. **2**: 1429~1437
- 7 Konno A, Uchiyama M, Kito Y, Murakami M. Vibration controllability of flexible manipulators. In: Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1994. **1**: 308~314
- 8 Konno A, Uchiyama M, Kito Y, Murakami M. Configuration-dependent vibration controllability of flexible-link manipulators. *International Journal of Robotics Research*, 1997, **16**(4): 567~576
- 9 Chen Wei, Yu Yue-Qing, Zhang Xu-Ping, Su Li-Ying. Dynamic modeling and simulation of underactuated flexible robot. *Chinese Mechanical Engineering*, 2006, **17**(9): 931~936  
(陈炜, 余跃庆, 张绪平, 苏丽颖. 欠驱动柔性机器人的动力学建模及仿真. *中国机械工程*, 2006, **17**(9): 931~936)
- 10 Popescu C. Nonlinear Control of Underactuated Horizontal Double Pendulum[M.S. dissertation], Florida Atlantic University, 2002
- 11 Suzuki T, Miyoshi W, Nakamura Y. Control of 2R underactuated manipulator with friction. In: Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control. 1998. **2**: 2007~2012
- 12 Arai H, Tanie K, Shiroma N. Nonholonomic control of a three-DOF planar underactuated manipulator. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1998, **14**(5): 681~695
- 13 Sussmann H J. A general theorem on local controllability. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, **25**(1): 158~194
- 14 Reyhanoglu M, van der Schaft A J, McClamroch N H, Kolmanovsky I. Nonlinear control of a class of underactuated systems. In: Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control. 1996. **2**: 1682~1687
- 15 Reyhanoglu M, van der Schaft A J, McClamroch N H, Kolmanovsky I. Dynamics and control of a class of underactuated mechanical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, **44**(9): 1663~1671
- 16 Bianchini R M, Stefani G. Controllability along a trajectory: A variational approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1993, **31**(4): 900~927
- 17 Lewis A D, Murray R. Configuration controllability of simple mechanical control systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1997, **35**(3): 766~790
- 18 Kobayashi K, Yoshikawa T. Controllability of underactuated planar manipulators with one unactuated joint. *The International Journal of Robotics Research*, 2002, **21**(5~6): 555~561



陈炜 北京工业大学机电学院博士研究生。主要研究方向为欠驱动柔性机器人, 机器人控制。本文通信作者。E-mail: chenwynn@emails.bjut.edu.cn  
(CHEN Wei Ph.D. candidate of Beijing University of Technology. Her research interest covers underactuated flexible robots and control of robots.

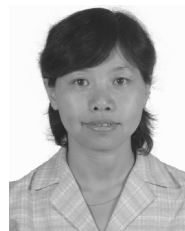
Corresponding author of this paper.)



余跃庆 北京工业大学机电学院教授, 博士生导师。主要研究方向为机器人学, 机构学。E-mail: yqyu@bjut.edu.cn  
(YU Yu-Qing Professor of the Mechanical Engineering College of Beijing University of Technology. His research interest covers mechanisms and robotics.)



张绪平 北京工业大学机电学院副教授。主要研究方向为机器人学, 机构学。E-mail: zhxp@bjut.edu.cn  
(ZHANG Xu-Ping Associate professor of the Mechanical Engineering College of Beijing University of Technology. His research interest covers mechanisms and robotics.)



苏丽颖 北京工业大学机电学院讲师。主要研究方向为机器人控制, 多机器人协调。E-mail: sly@bjut.edu.cn  
(SU Li-Ying Lecturer of the Mechanical Engineering College of Beijing University of Technology. Her research interest covers control of robots and coordination of multi-robots.)