

时滞标准神经网络模型及其应用¹⁾

刘妹琴

(浙江大学电气工程学院系统科学与工程学系 杭州 310027)
(E-mail: liumeiqin@cee.zju.edu.cn)

摘要 提出一种新的神经网络模型——时滞标准神经网络模型 (DSNNM), 它由线性动力学系统和有界静态时滞非线性算子连接而成. 利用不同的 Lyapunov 泛函和 S 方法推导出 DSNNM 全局渐近稳定性和全局指数稳定性的充分条件, 这些条件可表示为线性矩阵不等式 (LMI) 形式. 大多数时滞 (或非时滞) 动态神经网络 (DANN) 稳定性分析或神经网络控制系统都可以转化为 DSNNM, 以便使用统一的方法进行稳定性分析或镇定控制. 从 DSNNM 应用于时滞联想记忆 (BAM) 神经网络的稳定性分析以及 PH 中和过程神经控制器的综合实例, 可以看出, 得到的稳定性判据扩展并改进了以往文献中的稳定性定理, 而且可将稳定性分析推广到非线性控制系统的综合.

关键词 时滞标准神经网络模型 (DSNNM), 线性矩阵不等式 (LMI), 稳定性, 广义特征值问题 (GEVP), 双向联想记忆 (BAM)

中图分类号 TP183

Delayed Standard Neural Network Model and Its Application

LIU Mei-Qin

(Department of System Science and Engineering, School of Electrical Engineering,
Zhejiang University, Hangzhou 310027)
(E-mail: liumeiqin@cee.zju.edu.cn)

Abstract A novel neural network model, named delayed standard neural network model (DSNNM), is proposed, which is the interconnection of a linear dynamic system and a bounded static delayed nonlinear operator. By combining a number of different Lyapunov functionals with S-Procedure, some sufficient conditions for global asymptotic stability and global exponential stability of the DSNNM are derived and formulated as linear matrix inequalities (LMIs). Most delayed (or non-delayed) dynamic artificial neural networks (DANNs) or neuro-control systems can be transformed into DSNNMs so that stability analysis or stabilization synthesis can be done in a unified way. In this paper, DSNNMs are applied to analyzing the stability of the delayed bidirectional associative memory (BAM) neural networks and synthesizing the neuro-controllers for the PH neutralization process. The stability criteria obtained turn out to be a generalization of some previous criteria. The analysis approach is further extended to the nonlinear control system.

Key words Delayed standard neural network model (DSNNM), linear matrix inequality (LMI), stability, generalized eigenvalue problem (GEVP), bidirectional associative memory (BAM)

1) 国家自然科学基金 (60374028) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of P.R. China (60374028)

收稿日期 2004-6-7 收修改稿日期 2004-12-28

Received June 7, 2004; in revised form December 28, 2004

1 引言

近二十几年来, 人工神经网络的理论和应用的研究, 已形成了世界性的热潮, 最近人们更多关注于动态神经网络 (DANN), 由于其良好的动力学特性和并行性, 并易于用大规模集成电路 (VLSI) 实现, 所以它被广泛地应用于控制系统的辨识 / 控制、智能优化计算和联想记忆等方面^[1], 但是 DANN 平衡点的稳定性分析是一个重要的研究课题, 它是一切应用的前提. 有很多学者从事不同 DANN (如 Hopfield 网络、细胞神经网络和 BAM 网络) 的稳定性^[2~4] 以及神经网络反馈控制系统的镇定^[5,6] 的研究, 方法多样, 成果众多, 但是其证明过程繁琐, 即使对同一类型的 DANN, 结论也不一样, 存在着不同程度的保守性, 而且难以在工程中应用. Suykens^[1] 将 DANN 转化为 NL_q 形式, 利用 Lyapunov 稳定性理论的一些经典结论, 分析 NL_q 系统平衡点的稳定性, 并将稳定性充分条件转化为线性矩阵不等式 (LMI) 求解问题^[7]. 由于稳定性充分条件的 LMI 形式, 比其他形式的条件 (如矩阵的范数、矩阵方程等) 更容易验证, 可以降低保守性, 所以 Suykens 的方法得到广泛应用, 但是该方法也存在一些缺点: 例如当存在多层隐含层时, 必须使得一些隐含层的阈值为零, 才能表示为 NL_q 形式, 这使得 DANN 的逼近能力降低, 无法发挥其优点, 而且必将导致保守的稳定性判据. 刘妹琴等人^[8] 在 Suykens 的工作基础上, 首次提出标准神经网络模型 (SNNM) 的概念, 并利用 Lyapunov 方法推导出基于 LMI 的 SNNM 全局渐近稳定性定理, 通过状态空间扩展法, 将离散递归多层感知器 (RMLP) 转化为 SNNM 形式, 从而可以利用有关 SNNM 的一些结论来判定 RMLP 的稳定性, 并考虑非零阈值对稳定性的影响. 颜钢锋等人^[9] 利用 SNNM 的概念, 对其性质和在控制中的应用进行了初步的探讨, 但 SNNM 不能用于时滞系统.

另一方面, 现实世界生物神经元之间以及电路实现本身存在时滞, 亦即轴突信号传输过程中存在延迟, 所以时滞动态神经网络 (DDANN) 更能真实地模拟人脑处理信息的属性. 人们对 DDANN 网络的训练、应用和性能做了大量的研究, 得到了很多有意义的结果, 但是这些结果大多以复杂的公式出现, 而且推导过程多借助研究泛函微分方程稳定性的方法, 得到相类似的结论, 在工程应用上, 有一定的难度. 廖晓峰等人^[10,11] 首先利用 LMI 方法来分析 DDANN 的渐近稳定和指数稳定, 简化了分析过程, 而且保守性较低, 为进一步研究 DDANN 提供了思路.

类似鲁棒控制中的标准模型, 本文提出一种时滞标准神经网络模型 (DSNNM), 它是 [8] 和 [9] 中所提出的 SNNM 的扩展, 不仅能用于非时滞系统, 而且也可用于时滞系统. 利用 Lyapunov 方法, 推导出 DSNNM 的全局渐近稳定和全局指数稳定的充分条件, 这些条件都表示为 LMI 形式, 容易验证, 保守性低. 将各种类型的 DANN 或神经网络控制系统转化为 DSNNM 形式, 利用 DSNNM 的性质, 就可以进行 DANN 的稳定性分析或控制器的设计. DSNNM 的提出以及性质的研究, 不仅将大部分的文献中基于 LMI 的 DANN 的稳定性定理, 作为特例纳入分析体系, 而且降低了稳定条件的保守性.

2 时滞标准神经网络模型

参照 [8] 和 [9], DSNNM 是由一个线性动力学系统和有界激励函数构成的静态时滞非线性算子连接而成, 这里仅讨论连续 DSNNM 情形, 离散情形具有类似的结构和结论. 连续的 DSNNM 结构如图 1 所示. 方框 Φ 由非线性激励函数 $\phi_i(\xi_i(\cdot))$ 构成的块对角算子, $\phi_i(\xi_i(\cdot))$ 一般为连续、可微、单调递增、斜率有界的有界输出函数. 矩阵 N 表示积分器 \int (离散情形为时滞 $z^{-1}I$) 和算子 Φ 的输入和输出之间的线性映射. 向量 $\xi(\cdot)$ 和 $\phi(\xi(\cdot))$ 分

别表示非线性算子 Φ 的输入和输出. 方框 D 代表滞后作用, $\kappa(t)$ 为系统的可变时滞, 且 $\kappa(t) \leq h$, h 为系统的最大时滞.

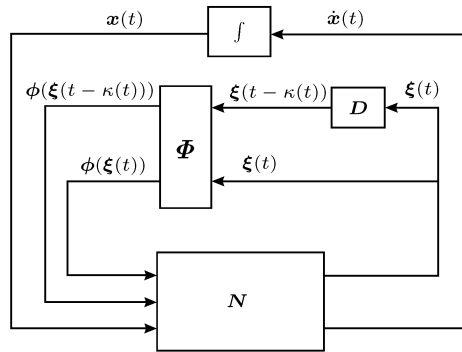


图 1 时滞连续标准神经网络模型 (DSNNM)

Fig. 1 Delayed standard neural network model(DSNNM)

若能将图 1 中矩阵 N 写成如下分块形式:

$$N = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C & D_1 & D_2 \end{bmatrix}$$

其中, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_1 \in \mathfrak{R}^{n \times L}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{n \times L}$, $C \in \mathfrak{R}^{L \times n}$, $D_1 \in \mathfrak{R}^{L \times L}$, $D_2 \in \mathfrak{R}^{L \times L}$, $x \in \mathfrak{R}^n$, $\phi \in \mathfrak{R}^L$, $L \in \mathfrak{R}$ 为非线性激励函数的个数 (即神经网络隐含层和输出层的神经元个数总和). 那么 DSNNM 可以用下列时滞线性微分包含 (LDI) 表示:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1\phi(\xi(t)) + B_2\phi(\xi(t - \kappa(t))) \\ \xi(t) = Cx(t) + D_1\phi(\xi(t)) + D_2\phi(\xi(t - \kappa(t))) \\ \phi(\xi(t)) = \Phi(\xi(t)) \end{cases} \quad (1)$$

当 $t < h$ 时, $\phi_i(\xi_i(t - h)) = \phi_i(\xi_i(0))$. 该系统的平衡点 $x_{eq} = 0$, 且为唯一平衡点. 如果系统 (1) 中 $D_1 = 0$ 、 $D_2 = 0$, 非线性激励函数满足扇区条件 $\phi_i(\xi_i(t))/\xi_i(t) \in [q_i, u_i]$, 即 $[\phi_i(\xi_i(t)) - q_i\xi_i(t)] \cdot [\phi_i(\xi_i(t)) - u_i\xi_i(t)] \leq 0$, $u_i > q_i \geq 0$, 且 $\phi_i(0) = 0, i = 1, \dots, L$, 且系统具有相同的时滞 h , 有如下一些稳定性定理成立.

定理 1. DSNNM(1) 的平衡点为全局渐近稳定的充分条件是: 存在对称正定矩阵 P 、 Γ 和对角半正定矩阵 Λ 、 T 使得下列 LMI 成立

$$G = \begin{bmatrix} A^T P + PA - 2C^T T Q U C & A^T C^T \Lambda + P B_1 + C^T (Q + U) T & P B_2 \\ A C A + B_1^T P + T (Q + U) C & B_1^T C^T \Lambda + \Lambda C B_1 + \Gamma - 2T & \Lambda C B_2 \\ B_2^T P & B_2^T C^T \Lambda & -\Gamma \end{bmatrix} < 0 \quad (2)$$

其中, $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_L)$, $U = \text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_L)$.

证明. 为了简化下面的证明过程, 将 $x(t)$ 简记为 x , $\xi_i(t)$ 简记为 ξ_i , $\phi_i(\xi_i(t))$ 简记为 ϕ_i , $\phi(\xi(t))$ 简记为 ϕ , $\phi(\xi(t - h))$ 简记为 ϕ_h . 对于 DSNNM(1), 采用如下 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V(x) = x^T P x + \int_{-h}^0 \phi^T(\xi(t + \theta)) \Gamma \phi(\xi(t + \theta)) d\theta + 2 \sum_{i=1}^L \lambda_i \int_0^{\xi_i} \phi_i(\sigma) d\sigma$$

$P > 0, \Gamma > 0, \lambda_i \geq 0$, 因此, $\forall \mathbf{x} \neq 0, V(\mathbf{x}) > 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$. $V(\mathbf{x})$ 对时间 t 求全导数:

$$\frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = 2(\mathbf{x}^T P + \sum_{i=1}^L \lambda_i \phi_i C_i)(A\mathbf{x} + B_1\phi + B_2\phi_h) + \phi^T \Gamma \phi - \phi_h^T \Gamma \phi_h =$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \\ \phi_h \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} A^T P + PA & A^T C^T \Lambda + PB_1 & PB_2 \\ \Lambda C A + B_1^T P & B_1^T C^T \Lambda + \Lambda C B_1 + \Gamma & \Lambda C B_2 \\ B_2^T P & B_2^T C^T \Lambda & -\Gamma \end{bmatrix}}_{T_0} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \\ \phi_h \end{bmatrix}$$

其中, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_L)$, 且 $\Lambda \geq 0$. 又因为 $(\phi_i - q_i \xi_i)(\phi_i - u_i \xi_i) \leq 0$, 则

$$(\phi_i - q_i C_i \mathbf{x})(\phi_i - u_i C_i \mathbf{x}) \leq 0 \Leftrightarrow 2\phi_i^2 - 2\phi_i(q_i + u_i)C_i \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T C_i^T q_i u_i C_i \mathbf{x} \leq 0 \quad (3)$$

其中, C_i 为矩阵 C 的第 i 行, 将式 (3) 写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{i-1} \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \\ \vdots \\ \phi_L \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -C_i^T(q_i + u_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -(q_i + u_i)C_i & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{T_i^1} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{i-1} \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \\ \vdots \\ \phi_L \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 2C_i^T q_i u_i C_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{T_i^2} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \end{bmatrix} \leq 0 \quad (4)$$

应用 S 方法^[7], 若

$$T_0 - \sum_{i=1}^L \tau_i \begin{bmatrix} T_i^1 + T_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T P + PA & A^T C^T \Lambda + PB_1 & PB_2 \\ \Lambda C A + B_1^T P & B_1^T C^T \Lambda + \Lambda C B_1 + \Gamma & \Lambda C B_2 \\ B_2^T P & B_2^T C^T \Lambda & -\Gamma \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} 2C^T T Q U C & -C^T(Q + U)T & 0 \\ -T(Q + U)C & 2T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = G < 0$$

则 $T_0 < 0$, 即 $dV(x)/dt < 0, \forall x \neq 0$, 其中, $T = \text{diag}(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_L)$, 且 $T \geq 0$. 因此 DSNM(1) 的平衡点为全局渐近稳定. 证毕.

定理 2. DSNM(1) 的平衡点为全局指数稳定的充分条件是: 存在对称正定矩阵 P 、 Γ 、 K_1 、 K_2 , 对角半正定矩阵 T 和标量 $\alpha > 0$ 使得下列条件成立

$$\min \quad \alpha \quad (5)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A^T P + PA + K_1 - 2C^T T Q U C & PB_1 + C^T(Q + U)T & PB_2 \\ B_1^T P + T(Q + U)C & \Gamma - 2T & 0 \\ B_2^T P & 0 & -K_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

$$2P < \alpha K_1 \quad (7)$$

$$2hK_2 < \alpha(\Gamma - K_2) \quad (8)$$

而且,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P) + \lambda_M(C^T U F U C) \frac{1-e^{-2\gamma h}}{2\gamma}}{\lambda_m(P)}} \|\mathbf{M}\| e^{-\gamma t} \quad (9)$$

其中, $\alpha = 1/\gamma$, $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_L)$, $U = \text{diag}(u_1, u_2, \dots, u_L)$, γ 为指数稳定度.

证明. 对于 DSNM(1), 采用如下 Lyapunov-Krasovskii 函数:

$$V(\mathbf{x}) = e^{2\gamma t} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \int_{-h}^0 e^{2\gamma(t+\theta)} \phi^T(\xi(t+\theta)) \Gamma \phi(\xi(t+\theta)) d\theta$$

$P > 0$, $\Gamma > 0$, $\gamma > 0$, 因此, $\forall \mathbf{x} \neq 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$, 当且仅当 $\mathbf{x} = 0$ 时, $V(\mathbf{x}) = 0$. $V(\mathbf{x})$ 对时间 t 求全导数:

$$\begin{aligned} \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} &= 2\gamma e^{2\gamma t} \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2e^{2\gamma t} \mathbf{x}^T P (A\mathbf{x} + B_1\phi + B_2\phi_h) + e^{2\gamma t} \phi^T \Gamma \phi - e^{2\gamma(t-h)} \phi_h^T \Gamma \phi_h = \\ &= e^{2\gamma t} [\mathbf{x}^T (A^T P + PA + 2\gamma P) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P B_1 \phi + \mathbf{x}^T P B_2 \phi_h + \phi^T B_1^T P \mathbf{x} + \phi^T \Gamma \phi + \phi_h^T B_2^T P \mathbf{x} - \\ &= e^{-2\gamma h} \phi_h^T \Gamma \phi_h] < e^{2\gamma t} [\mathbf{x}^T (A^T P + PA + K_1) \mathbf{x} + \mathbf{x}^T P B_1 \phi + \mathbf{x}^T P B_2 \phi_h + \phi^T B_1^T P \mathbf{x} + \\ &= \phi^T \Gamma \phi + \phi_h^T B_2^T P \mathbf{x} - \phi_h^T K_2 \phi_h] = e^{2\gamma t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \\ \phi_h \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + K_1 & P B_1 & P B_2 \\ B_1^T P & \Gamma & 0 \\ B_2^T P & 0 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \phi \\ \phi_h \end{bmatrix}}_{T_0} \end{aligned}$$

其中, $K_1 > 2\gamma P > 0$, $0 < K_2 < e^{-2\gamma h} \Gamma$. 利用式 (4), 并应用 S 方法^[7], 得不等式 (6) 成立, 则 $T_0 < 0$, 即 $dV(\mathbf{x})/dt < 0$, $\forall \mathbf{x} \neq 0$, 所以 $V(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(0))$, 而

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(0)) &= \mathbf{x}(0)^T P \mathbf{x}(0) + \int_{-h}^0 e^{2\gamma\theta} \phi^T(\xi(\theta)) \Gamma \phi(\xi(\theta)) d\theta \leq \mathbf{x}(0)^T P \mathbf{x}(0) + \\ &= \int_{-h}^0 e^{2\gamma\theta} \mathbf{x}^T(\theta) C^T U F U C \mathbf{x}(\theta) d\theta \leq \lambda_M(P) \|\mathbf{M}\|^2 + \lambda_M(C^T U F U C) \|\mathbf{M}\|^2 \int_{-h}^0 e^{2\gamma\theta} d\theta = \\ &= \left[\lambda_M(P) + \lambda_M(C^T U F U C) \frac{1-e^{-2\gamma h}}{2\gamma} \right] \|\mathbf{M}\|^2 \end{aligned}$$

其中, $\|\mathbf{M}\| = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} \|\mathbf{x}(\theta)\|$, 而 $V(\mathbf{x}(t)) \geq e^{2\gamma t} \mathbf{x}(t)^T P \mathbf{x}(t) \geq e^{2\gamma t} \lambda_m(P) \|\mathbf{x}(t)\|^2$, 所以可得式

(9), 其中 $\lambda_M(P)$ 和 $\lambda_m(P)$ 分别为矩阵 P 的最大和最小特征值. 根据文献 [11] 的定义 1, 可知 DSNM(1) 是全局指数稳定.

由 $K_1 > 2\gamma P$, 得 $2P < \frac{1}{\gamma} K_1$; 由 $K_2 < e^{-2\gamma h} \Gamma$, 得 $(1 + 2\gamma h) K_2 \leq e^{2\gamma h} K_2 < \Gamma$, 所以, $2hK_2 < \frac{1}{\gamma}(\Gamma - K_2)$. 令 $\alpha = 1/\gamma$, 可得 inequality (7) 和 (8).

对于全局指数稳定系统, 总希望 γ 越大越好, 即 α 越小越好, 这样判定 DSNM(1) 的平衡点的全局指数稳定性就转化为求解广义特征值问题 (GEVP) 式 (5)~(8). 证毕.

如果式 (1) 中的 $B_2 = 0$ 及 $D_2 = 0$, 则 DSNM 就转化为非时滞的 SNNM, 即可用如下 LDI 表示:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B_1\phi(\xi(t)) \\ \xi(t) = C\mathbf{x}(t) + D_1\phi(\xi(t)) \\ \phi(\xi(t)) = \Phi(\xi(t)) \end{cases} \quad (10)$$

如果 $D_1 = 0$, 且非线性激励函数还满足扇区条件 $\phi_i(\xi_i(t))/\xi_i(t) \in [q_i, u_i]$, $u_i > q_i \geq 0$, 有如下推论成立.

推论 1. 如果存在对称正定矩阵 P 和对角半正定矩阵 Λ 、 T 使得下列 LMI 成立

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA - 2C^T T Q U C & A^T C^T \Lambda + P B_1 + C^T (Q + U) T \\ \Lambda C A + B_1^T P + T (Q + U) C & B_1^T C^T \Lambda + \Lambda C B_1 - 2T \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

则 SNNM(10) 的平衡点为全局渐近稳定.

推论 2. 如果存在对称正定矩阵 P 、 K_1 , 对角半正定矩阵 T 和标量 $\alpha > 0$ 使得下列条件成立:

$$\begin{aligned} \min \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A^T P + PA + K_1 - 2C^T T Q U C & P B_1 + C^T (Q + U) T \\ B_1^T P + T (Q + U) C & -2T \end{bmatrix} < 0, \quad 2P < \alpha K_1 \end{aligned}$$

则 SNNM(10) 的平衡点为全局指数稳定, 而且,

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|\mathbf{x}(0)\| e^{-\gamma t}$$

推论 1 和推论 2 的证明与定理 1 和定理 2 的证明类似, 这里省略. 对于证明推论 1, 采用如下 Lur'e-Postnikov Lyapunov 函数:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} + 2 \sum_{i=1}^L \lambda_i \int_0^{\xi_i} \phi_i(\sigma) d\sigma$$

对于证明推论 2, 采用如下 Lyapunov 函数:

$$V(\mathbf{x}) = e^{2\gamma t} \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$$

虽然推论 1 的稳定性条件与 [7] 的第 120 页类似, 但推论 1 中考虑了扇区界为任意区间的情形, 不仅仅是 $[0,1]$, 所以 [7] 的结论是推论 1 的特例, 当 $q_i = 0$, $u_i = 1$, $i = 1, \dots, L$ 时, 式 (11) 就是 [7] 的式 (8.6).

3 DSNNM 的应用

为了利用定理 1、定理 2 或推论 1、推论 2 进行 DANN 的稳定性分析或神经网络控制系统的镇定控制器设计, 首先通过状态平移或其他变换, 将它们化成 DSNNM 的形式, 而且平衡点为原点. 下面分析时滞动态神经网络的平衡点的稳定性, 以及针对用神经网络建模的 PH 中和过程设计镇定输出反馈控制器.

3.1 时滞动态神经网络的稳定性分析

[10] 和 [11] 中提到的时滞神经网络模型:

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}(t)}{dt} = -V\boldsymbol{\mu}(t) + W_0 g(\boldsymbol{\mu}(t)) + W_1 g(\boldsymbol{\mu}(t - \tau)) + I \quad (12)$$

式中各参数的意义见 [10] 或 [11], 它包含了大部分的时滞神经网络模型, 例如时滞双向联想记忆 (BAM) 神经网络, 时滞 Hopfield 网络, 时滞细胞神经网络 (DCNN) 等. [10] 分析

系统 (12) 的渐近稳定性, [11] 分析系统 (12) 的指数稳定性, 得到许多有用的定理, 但这些定理都是通过放大 Lyapunov-Krasovskii 函数得到的, 这将带来一定的保守性. 而且 [11] 在分析指数稳定性时, 充分条件不是写成 LMI 形式, 而是非线性矩阵不等式形式, 文中未提供其解法. 如果系统 (12) 的平衡点为 μ^* , 则 μ^* 满足下式:

$$V\mu^* = (W_0 + W_1)g(\mu^*) + I$$

对系统 (12) 作线性变换 $x(t) = \mu(t) - \mu^*$, 则

$$\dot{x}(t) = -Vx(t) + W_0\phi(\xi(t)) + W_1\phi(\xi(t-\tau)), \phi(\xi(t)) = g(\xi(t) + \mu^*) - g(\mu^*), \xi(t) = x(t) \quad (13)$$

系统 (13) 与系统 (12) 具有相近的形式, 但是系统 (13) 的平衡点为原点, 其非线性激励函数 ϕ 分量为 $\phi_i(\xi_i(t)) = g_i(\xi_i(t) + \mu_i^*) - g_i(\mu_i^*) (i = 1, \dots, n)$, 如果 μ_i^* 不同, ϕ_i 也不同, 但是 ϕ_i 仍保留了 g_i 的某些性质. 系统 (12) 中, 若取 g_i 为双曲正切函数 $\tanh(\cdot)$, 则 $\phi_i(\xi_i(t)) = \tanh(\xi_i(t) + \mu_i^*) - \tanh(\mu_i^*)$. 如果平衡点 $\mu^* = 0$, 则其扇区界为 $[0,1]$; 当 $\mu^* \neq 0$ 时, 其扇区界要小的多, 是前者的子集.

设 $\varphi_i(s) = \tanh(s + \mu_i^*) - \tanh(\mu_i^*)$, 对于系统 (13) 的扇区上界可由如下式子求得:

$$u_i = \max\{\varphi_i(s)/s : s \neq 0\}, U = \text{diag}\{u_i\}$$

系统 (13) 的扇区下界 q_i 可取为 0, 则 $Q = 0$. 系统 (12) 中, 若 g_i 为其它激励函数, 如 $\arctan(\cdot)$, 扇区界的求取类似 $\tanh(\cdot)$.

经过上述变换, 系统 (13) 就具有了 DSNM(1) 的形式, 其中 $A = -V$, $B_1 = W_0$, $B_2 = W_1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $L = n$, C 为 $n \times n$ 维单位矩阵, 并且满足扇区条件 $\phi_i(\xi_i(t))/\xi_i(t) \in [q_i, u_i]$, 因此可以利用定理 1 和定理 2 来判别系统 (13)(即系统 (12)) 的平衡点的全局渐近稳定性和全局指数稳定性.

下列是一个具有 4 个神经元的固定时滞的 BAM 神经网络:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -1.1x_1(t) - 0.051\tanh(y_1(t-1)) + 0.051\tanh(y_2(t-1)) + 1.0 \\ \dot{x}_2(t) = -1.2x_2(t) - 0.62\tanh(y_1(t-1)) - 0.42\tanh(y_2(t-1)) - 1.0 \\ \dot{y}_1(t) = -1.3y_1(t) - 0.073\tanh(x_1(t-1)) + 0.033\tanh(x_2(t-1)) + 2.0 \\ \dot{y}_2(t) = -1.4y_2(t) + 0.24\tanh(x_1(t-1)) - 0.24\tanh(x_2(t-1)) - 2.0 \end{cases} \quad (14)$$

系统 (14) 的连接权值参数和激励函数满足文献 [12] 的定理 1, 所以系统 (14) 存在唯一平衡点. 将系统 (14) 化成系统 (12) 的形式, 则 $\mu(t) = (x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))^T$, $V =$

$$\text{diag}(1.1, 1.2, 1.3, 1.4), W_0 = 0, W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.051 & 0.051 \\ 0 & 0 & -0.62 & -0.42 \\ -0.073 & 0.033 & 0 & 0 \\ 0.24 & -0.24 & 0 & 0 \end{bmatrix}, I = (1.0, -1.0, 2.0,$$

$-2.0)^T$, 平衡点 $\mu^* = (0.8289, -1.0095, 1.4809, -1.1808)^T$. 该时滞 BAM 神经网络的时滞 $h = 1$, 计算出扇区界 $U = \text{diag}\{0.8625, 0.8136, 0.6915, 0.7675\}$, $Q = 0$. 令 $A = -V$, $B_1 = W_0 = 0$, $B_2 = W_1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, $L = 4$, C 为 $n \times n$ 维单位矩阵, 利用 MATLAB/LMI 控制工具箱^[13] 求解式 (2), 可得正定矩阵 P 和 Γ , 对角正定矩阵 Λ 和 T , 由定理 1 可知系统 (14) 在平衡点 μ^* 为全局渐近稳定. 如果采用 [10] 的定理 1, 无法得到不等式的可行解, 说明文献 [10] 所得到的稳定性定理具有一定的保守性.

根据定理 2, 求解 GEVP 式 (5)~(8), 可得: $\alpha = 9.0580$, 正定矩阵 P 、 Γ 、 K_1 和 K_2 , 对角正定矩阵 T , 由定理 2 可知系统 (14) 在平衡点 μ^* 也是全局指数稳定. 虽然 [11] 的定理

可以用来判别上述系统的指数稳定性,但在实际应用中是不可行的.因为所有不等式都是关于变量的非线性矩阵不等式,目前还没有好的算法和软件求解 [11] 中的矩阵不等式.因此,本文的定理 2 的实用性较强,它为实际判别神经网络的指数稳定性提供了一个途径.

3.2 神经网络控制系统的镇定控制器设计

这里将利用 DSNM 以及相关的稳定性结论设计 PH 中和过程的镇定输出反馈控制器, PH 中和过程的数学模型为^[14]:

$$v\dot{y} = -fy - u, \quad PH = w_2 \tanh(w_1 y)$$

其中, v 为反应槽的有效体积,输入 u 为基液流速, f 为酸液流速, y 为强酸当量,输出为反应槽的 PH 值.采用输出反馈控制器, $u = -KPH (K > 0)$. 我们的目的是设计合适的反馈增益 K 使闭环系统渐近稳定.闭环系统可以用如下动态方程表示:

$$\dot{y} = -\frac{f}{v}y + \frac{Kw_2}{v}\tanh(w_1 y), \quad K > 0 \quad (15)$$

系统 (15) 具有 SNNM(10) 的形式,其中 $A = -f/v$, $B = w_2/v$, $B_1 = BK$, $C = w_1$, $D_1 = 0$, $L = 1$, $Q = 0$, $U = 1$, 平衡点为原点.由于 K 为待求的反馈系数,由推论 2 可知只要找到正值的标量 P 、 A 、 T 和 K 满足式 (11),就可以使系统 (15) 在原点全局渐近稳定.对系统 (15),不等式 (11) 重写为:

$$\begin{bmatrix} 2AP & AC\Psi + PBK + CT \\ AC\Psi + PBK + CT & 2BKC\Psi - 2T \end{bmatrix} < 0$$

不等式 (16) 左边左乘和右乘 $\text{diag}(P^{-1}, \Psi^{-1})$, 则不等式 (16) 等价于:

$$\begin{bmatrix} 2AP^{-1} & ACP^{-1} + BK\Lambda^{-1} + CP^{-1}T\Lambda^{-1} \\ ACP^{-1} + BK\Lambda^{-1} + CP^{-1}T\Lambda^{-1} & 2CBK\Lambda^{-1} - 2T\Lambda^{-2} \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

令 $X = P^{-1}$, $Y = K\Lambda^{-1}$, $\Sigma_1 = P^{-1}T\Lambda^{-1}$, $\Sigma_2 = T\Lambda^{-2}$, 则不等式 (17) 可写为:

$$\begin{bmatrix} 2AX & ACX + BY + C\Sigma_1 \\ ACX + BY + C\Sigma_1 & 2CBY - 2\Sigma_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (18)$$

因此,如果存在正值的 X, Σ_1, Σ_2 和 Y 满足式 (18), 则闭环系统 (15) 就是全局渐近稳定的,而且反馈增益为 $K = Y\Sigma_2^{-1}X^{-1}\Sigma_1$.

如果 $f = 5.8154$, $v = 1500.3732$, $w_1 = 28.9860$, $w_2 = -3.8500$, 则 $A = -0.0039$, $B = -0.0026$, $C = 28.9860$. 利用 MATLAB/LMI 控制工具箱求解式 (18), 可得: $X = 1.0749$, $\Sigma_1 = 0.0053$, $\Sigma_2 = 0.4993$, $Y = 0.9269$. 由此可求得使系统 (15) 在原点全局渐近稳定的输出反馈增益 $K = 0.0091$.

4 结束语

类似线性鲁棒控制中的标准模型,提出了一种时滞标准神经网络模型 (DSNNM),它由线性系统和有界时滞非线性算子连接而成.通过状态变换,可以将绝大多数 DANN(时滞或非时滞)转化为 DSNM 形式,利用 DSNM 的性质来分析 DANN 的行为,另一方面,许多闭环神经网络控制系统也可以转化为 DSNM 形式,为其综合和分析提供新的途径,同时其他非线性系统的综合和分析也可借鉴.更重要的是,DSNNM 可以表示为线性微分包含 (LDI) 形式,它可以方便地利用目前在控制中广泛应用的 LMI 技术来分析 DSNM 的各种性能.本文只给出 DSNM 的稳定性定理,没有讨论其它的性能(如 L_2 增益),有关 DSNM 的其它性质的讨论是未来研究的方向.

References

- 1 Suykens J A K, Vandewalle J P L, De Moor B L R. Artificial Neural Networks for Modeling and Control of Non-linear Systems. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 1996
- 2 Liao Xiaoxin, Chang Li, Shen Yi. Study on stability of discrete-time Hopfield neural networks. *Acta Automatica Sinica*, 1999, **25**(6): 721~727
- 3 Li X M, Huang L H. Exponential stability and global stability of cellular neural networks. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **147**(3): 843~853
- 4 Liao X X, Liao Y, Liao Yu. Stability of bidirectional associative memory neural networks with delays. *Journal of Electronics (Chinese)*. 1998, **15**(4): 373~377
- 5 Limanond S, Si J. Neural-network-based control design: An LMI approach. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1998, **9**(6): 1422~1429
- 6 Miguel A B, Bart W, Ton V D B, Jose S D C. Robust stability of feedback linearised systems modelled with neural networks: deal with uncertainty. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2000, **13**(6): 659~670
- 7 Boyd S P, Ghaoui L E, Feron E, Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994
- 8 Liu Meiqin, Yan Gangfeng. Stability analysis of recurrent multiplayer perceptrons: an LMI approach. *Control Theory and Applications*, 2003, **20**(6): 897~902
- 9 Yan Gangfeng, Zhang Senlin, Liu Meiqin. Standard neural network model and its application. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2004, **38**(3): 297~301,305
- 10 Liao X F, Chen G R, Sanchez E N. LMI-based approach for asymptotical stability analysis of delayed neural networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2002, **49**(7): 1033~1039
- 11 Liao X F, Chen G R, Sanchez E N. Delayed-dependent exponential stability analysis of delayed neural networks: an LMI approach. *Neural Networks*, 2002, **15**(7): 855~866
- 12 Liao Xiaofeng, Liu Guangyuan, Yu Juebang. Neural network of bidirectional associative memory with axonal signal transmission delays. *Journal of Electronics*, 1997, **19**(4): 439~444
- 13 Gahinet P, Nemirovski A, Laub A J, Chilali M. LMI Control Toolbox- for Use With Matlab. Natick, MA: The MATH Works, Inc., 1995
- 14 Rios-Patron E, Braatz R D. Robust nonlinear control of a PH neutralization process. Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California: American Automatic Control Council, 1999. 119~123

刘妹琴 1999年毕业于中南工业大学,获工学博士学位,1999年~2001年在华中科技大学从事博士后研究工作,现为浙江大学电气工程学院副教授,研究方向为神经网络、混杂系统、鲁棒控制和线性矩阵不等式等。

(**LIU Mei-Qin** Received her Ph.D. degree from Central South University of Technology. From 1999 to 2001, she was a postdoctoral research fellow in Huazhong University of Science and Technology. She is now an associate professor of School of Electrical Engineering, Zhejiang University. Her research interests include neural network, hybrid system, robust control, and linear matrix inequality.)