

含有输入时滞的非线性系统的输出反馈采样控制

马倩¹ 盛兆明¹ 徐胜元¹

摘要 针对含有输入时滞和低阶非线性项的非线性系统, 提出一种基于采样机制的无记忆输出反馈控制方法. 该方法移除了传统预测控制方法预测映射难以确定的限制, 同时避免了时滞依赖方法对过去时刻状态信息的依赖性, 在实际中更易实现. 首先, 根据系统输出在采样时刻的信息, 利用加幂积分技术和齐次占优思想设计了无记忆输出反馈采样控制器. 然后, 利用齐次系统理论提出了闭环系统的稳定性条件. 最后, 仿真结果验证了所提方法的有效性和优越性.

关键词 无记忆采样控制, 输出反馈, 低阶非线性项, 输入时滞

引用格式 马倩, 盛兆明, 徐胜元. 含有输入时滞的非线性系统的输出反馈采样控制. 自动化学报, 2024, 50(9): 1772-1784

DOI 10.16383/j.aas.c220774

Sampled-data Output Feedback Control for Nonlinear Systems With Input Delay

MA Qian¹ SHENG Zhao-Ming¹ XU Sheng-Yuan¹

Abstract For nonlinear systems subject to input delay and low-order nonlinearities, a memoryless sampled-data output feedback control approach is proposed. This method removes the limitations that the traditional predictor mapping is difficult to determine and avoids the dependence on past state information, which is easy to be implemented. Firstly, based on the output information at sampling points, the memoryless sampled-data output feedback controller is successfully constructed by using the adding a power integrator technique and the homogeneous domination approach. Then, the stability conditions of the closed-loop system are proposed with the help of the homogeneous system theory. Finally, the effectiveness and advantages of the proposed method are demonstrated by using simulation examples.

Key words Memoryless sampled-data control, output feedback, low-order nonlinearities, input delay

Citation Ma Qian, Sheng Zhao-Ming, Xu Sheng-Yuan. Sampled-data output feedback control for nonlinear systems with input delay. *Acta Automatica Sinica*, 2024, 50(9): 1772-1784

近年来, 非线性系统的控制问题引起了国内外学者的广泛关注, 涌现出大量优秀的研究成果^[1-3]. 在对系统设计控制器时, 系统的非线性项需要满足一定的限制条件以避免产生有限时间逃逸现象. 例如, 在线性增长条件下, 文献 [4-6] 利用反馈占优方法, 实现了非线性系统的全局镇定. 为了放松上述线性增长条件, 文献 [7-13] 利用加幂积分技术解决了高阶非线性系统的控制问题. 然而, 在一些实际应用中, 低阶非线性项广泛存在于控制系统中, 使得上述方法不再适用. 因此, 如何解决含有低阶非线性项的非线性系统的控制问题具有重要意义.

众所周知, 输入时滞广泛存在于实际系统中, 常常造成系统性能下降, 甚至导致系统不稳定^[14].

因此, 如何消除输入时滞带来的负面影响成为了控制领域的研究热点. 针对含有输入时滞的非线性系统, 文献 [15-16] 提出基于预测的控制策略, 通过预测系统的状态信息来补偿输入时滞的影响. 然而, 预测控制依赖于系统的具体形式, 当系统含有不确定性时, 难以找到准确的预测映射. 文献 [17-18] 提出时滞依赖的控制方法, 但是得到的控制器与系统过去时刻的状态信息有关. 文献 [19-20] 提出无记忆反馈控制方法, 该方法仅利用系统当前时刻的状态信息设计控制器, 更易于实现. 然而, 文献 [19-20] 只考虑了满足线性增长条件的非线性系统. 对于含有输入时滞和低阶非线性项的非线性系统, 如何提出有效的无记忆反馈控制方案仍然是亟待解决的问题.

另一方面, 上述方法设计的控制器需要进行连续的信息更新, 从而导致大量的资源消耗^[21]. 因此, 如何提出有效的采样控制策略是解决这一问题的关键^[22]. 目前, 采样控制的研究方法主要分为以下两种: 一种方法是通过离散化得到连续系统的离散化模型, 然后基于此模型设计采样控制器. 对于线性系统而言, 其精确的离散化模型很容易得到. 但对于非线性系统, 离散化误差无法避免, 导致难以得

收稿日期 2022-09-28 录用日期 2023-04-12

Manuscript received September 28, 2022; accepted April 12, 2023

国家自然科学基金 (62173183) 资助

Supported by National Natural Science Foundation of China (62173183)

本文责任编辑 付俊

Recommended by Associate Editor FU Jun

1. 南京理工大学自动化学院 南京 210094

1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094

到全局稳定的结果^[23]. 另一种方法是直接针对连续系统设计连续时间控制器, 然后将控制器离散化得到采样控制器, 该方法通过选择合适的采样周期可保证闭环系统是全局稳定的. 利用后一种方法, 文献 [24–26] 针对一类满足线性增长条件的非线性系统, 研究了输出反馈采样控制问题. 然而, 文献 [24–26] 中的结果并未考虑输入时滞的影响.

根据以上讨论, 本文将基于无记忆反馈控制的思想, 针对含有输入时滞和低阶非线性项的非线性系统, 提出一种基于采样机制的输出反馈控制方案. 本文的主要贡献如下: 1) 控制方案充分考虑了低阶不确定非线性项的影响, 移除了预测映射难以确定的限制; 2) 利用齐次系统理论并结合 Gronwall-Bellman 不等式, 解决了最大允许采样周期和最大允许输入时滞难以确定的难题; 3) 控制方案只与系统输出在采样时刻的信息有关, 节约了通信资源.

本文用到如下符号: 定义 $[x]^p = \text{sign}(x)|x|^p$, 其中, $\text{sign}(\cdot)$ 为符号函数.

1 预备知识及系统描述

考虑如下含有输入时滞的非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) + \psi_i(t, x(t)), i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ \dot{x}_n(t) = u(t - \theta) + \psi_n(t, x(t)) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $y(t) \in \mathbf{R}$ 分别表示系统的状态, 系统的输入和系统的输出. $\psi_i(t, x(t))$, $i = 1, 2, \dots, n$ 为未知连续非线性函数且满足 $\psi_i(t, 0) = 0$. $\theta \geq 0$ 为输入时滞. 系统初始状态满足 $x(\kappa) = \phi(\kappa)$, $\forall \kappa \in [-\theta, 0]$.

定义 1^[27]. 给定坐标 (x_1, \dots, x_n) 和实数 $\iota_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, 引入以下定义:

- 1) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 定义扩张 $\Delta_\varepsilon(x) = (\varepsilon^{\iota_1} x_1, \dots, \varepsilon^{\iota_n} x_n)$, 其中, ι_i 为 x_i 的权重. 本文用 $\Delta = (\iota_1, \dots, \iota_n)$ 表示扩张.
- 2) 对于函数 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 和实数 $\omega \in \mathbf{R}$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $V(\Delta_\varepsilon(x)) = \varepsilon^\omega V(x_1, \dots, x_n)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, 则称函数 V 的齐次度为 ω .
- 3) 对于向量 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 和实数 $\omega \in \mathbf{R}$, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $f_i(\Delta_\varepsilon(x)) = \varepsilon^{\omega + \iota_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$, $\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, 则称向量 f 的齐次度为 ω .

4) 对于常数 $p \geq 1$, 定义齐次 p -范数为 $\|x\|_{\Delta, p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{p}{\iota_i}}\right)^{\frac{1}{p}}$. 本文用 $\|x\|_\Delta$ 表示 $\|x\|_{\Delta, 2}$.

假设 1. 对于 $i = 1, \dots, n$, 存在已知常数 $c \geq 0$, 满足

$$|\psi_i(\cdot)| \leq c \sum_{j=1}^i |x_j(t)|^{\frac{r_{i+1}}{r_j}} \quad (2)$$

其中, $r_1 = 1$, $r_i = r_{i-1} + \omega$, $i = 2, \dots, n + 1$ 且 $\omega \in (-1/n, 0)$.

注 1. 文献 [19–20] 和文献 [24–26] 中的方法只适用于满足线性增长条件的非线性系统, 当 $\omega < 0$ 时, 系统中含有低阶非线性项, 上述文献中的方法不再适用.

引理 1^[10]. 对于任意的 $\aleph_1 \in \mathbf{R}$, $\aleph_2 \in \mathbf{R}$ 以及实数 $m > 0$, $n > 0$, 存在 $\gamma > 0$, 使得

$$\begin{aligned} |\aleph_1|^m |\aleph_2|^n &\leq \frac{m}{m+n} \gamma |\aleph_1|^{m+n} + \\ &\frac{n}{m+n} \gamma^{-\frac{m}{n}} |\aleph_2|^{m+n} \end{aligned} \quad (3)$$

引理 2^[7]. 对于任意的 $\aleph_1 \in \mathbf{R}$, $\aleph_2 \in \mathbf{R}$ 以及 $p \geq 1$, 存在 $\lambda > 0$, 使得

$$\begin{cases} \left| |\aleph_1|^p - |\aleph_2|^p \right| \leq \lambda |\aleph_1 - \aleph_2| (|\aleph_1|^{p-1} + |\aleph_2|^{p-1}) \\ \left| |\aleph_1|^{\frac{1}{p}} - |\aleph_2|^{\frac{1}{p}} \right| \leq 2^{1-\frac{1}{p}} |\aleph_1 - \aleph_2|^{\frac{1}{p}} \end{cases} \quad (4)$$

引理 3^[7]. 对于任意给定的 C^2 函数 $h(\epsilon) = [\epsilon]^\alpha$, $\epsilon \in \mathbf{R}$, $\alpha > 2$, 满足 $h'(\epsilon) = \alpha|\epsilon|^{\alpha-1}$ 以及 $h''(\epsilon) = \alpha(\alpha - 1)[\epsilon]^{\alpha-2}$.

引理 4^[28]. 对于任意的 $\sigma_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, n$ 以及 $\bar{p} \geq 0$, 如下不等式成立

$$\begin{aligned} (|\sigma_1| + \dots + |\sigma_n|)^{\bar{p}} &\leq \\ \max\{n^{\bar{p}-1}, 1\} (|\sigma_1|^{\bar{p}} + \dots + |\sigma_n|^{\bar{p}}) \end{aligned} \quad (5)$$

引理 5^[8]. 对于任意的 $\nu \in (0, 1)$, $\ell \in (0, 1)$ 以及 $\pi \in \mathbf{R}$, 如下不等式成立

$$[\pi]^\nu + [1 - \pi]^\nu + \ell^2 [\pi]^{1+\nu} \geq (2^\nu - 1)\ell^{1-\nu} \quad (6)$$

引理 6^[29]. 给定扩张 $\Delta = (\iota_1, \dots, \iota_n)$, 假设函数 $V : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 关于扩张 Δ 的齐次度为 ω , 则

- 1) $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ 的齐次度为 $\omega - \iota_i$, 其中, ι_i 为 x_i 的权重;
- 2) 若 $V(x)$ 正定, 则存在正常数 $\bar{\kappa}$ 和 $\underline{\kappa}$, 使得 $\underline{\kappa}\|x\|_\Delta^\omega \leq V(x) \leq \bar{\kappa}\|x\|_\Delta^\omega$.

引理 7^[28]. 假设 $\zeta(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 如果存在实数 \bar{p} 和 \bar{q} 满足 $\bar{p} > 1$ 以及 $1/\bar{p} + 1/\bar{q} = 1$, 则有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \zeta(x)h(x)dx \right| &\leq \\ \left(\int_a^b |\zeta(x)|^{\bar{p}} dx \right)^{\frac{1}{\bar{p}}} &\left(\int_a^b |h(x)|^{\bar{q}} dx \right)^{\frac{1}{\bar{q}}} \end{aligned} \quad (7)$$

2 主要结果

本节分为四个部分: 首先, 通过坐标变换引入可调增益 L . 然后, 针对标称系统设计输出反馈控制器, 并利用齐次占优思想确定可调增益的取值. 最后, 对闭环系统进行分析, 得到最大允许采样周期和最大允许输入时滞.

2.1 坐标变换

定义如下坐标变换

$$z_i = \frac{x_i}{L^{i-1}}, \bar{\psi}_i(\cdot) = \frac{\psi_i(\cdot)}{L^{i-1}}, i = 1, \dots, n, v = \frac{u}{L^n} \quad (8)$$

其中, $L \geq 1$ 为可调增益. 根据式 (1) 和式 (8), 可得

$$\begin{cases} \dot{z}_i(t) = Lz_{i+1}(t) + \bar{\psi}_i(t, z(t)), i = 1, \dots, n-1 \\ \dot{z}_n(t) = Lv(t) + \bar{\psi}_n(t, z(t)) + L(v(t-\theta) - v(t)) \\ y(t) = z_1(t) \end{cases} \quad (9)$$

进一步, 由假设 1 计算得到

$$|\bar{\psi}_i(\cdot)| \leq cL^{1-\frac{1}{r_i}} \sum_{j=1}^i |z_j(t)|^{\frac{r_i+1}{r_j}}, i = 1, \dots, n \quad (10)$$

2.2 标称系统控制器设计

考虑如下标称系统

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = Lz_2(t), \dots, \dot{z}_{n-1}(t) = Lz_n(t) \\ \dot{z}_n(t) = Lv(t) \end{cases} \quad (11)$$

下面对标称系统 (11) 设计状态反馈控制器.

步骤 1. 考虑 Lyapunov 函数 $V_1 = \frac{1}{2}z_1^2$, 对其求导可得

$$\dot{V}_1 = Lz_1z_2^* + Lz_1(z_2 - z_2^*) \quad (12)$$

定义 $\xi_1 = z_1$ 并选择 $z_2^* = -\alpha_1[\xi_1]^{r_2}$, $\alpha_1 \geq n + \frac{1}{4}$, 计算可得

$$\dot{V}_1 \leq -\left(n + \frac{1}{4}\right)L|\xi_1|^{2+\omega} + Lz_1(z_2 - z_2^*) \quad (13)$$

步骤 2. 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V_2 = V_1 + \int_{z_2^*}^{z_2} \left[|s|^{\frac{1}{r_2}} - |z_2^*|^{\frac{1}{r_2}}\right]^{2-r_2} ds \quad (14)$$

定义 $\xi_2 = [z_2]^{\frac{1}{r_2}} - [z_2^*]^{\frac{1}{r_2}}$, 根据引理 3 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -\left(n + \frac{1}{4}\right)L|\xi_1|^{2+\omega} + L\xi_1(z_2 - z_2^*) + \\ & L[\xi_2]^{2-r_2}z_3 + (2-r_2)\frac{d(-[z_2^*]^{\frac{1}{r_2}})}{dt} \times \\ & \int_{z_2^*}^{z_2} \left[|s|^{\frac{1}{r_2}} - |z_2^*|^{\frac{1}{r_2}}\right]^{1-r_2} ds \end{aligned} \quad (15)$$

进一步, 由引理 2 和引理 4 可知, $|z_2| \leq |\xi_2|^{r_2} + \alpha_1|\xi_1|^{r_2}$, $|z_2 - z_2^*| \leq 2^{1-r_2}|\xi_2|^{r_2}$. 因此, 存在正常数 $c_{1,1}$ 使得

$$\int_{z_2^*}^{z_2} (2-r_2) \left| |s|^{\frac{1}{r_2}} - |z_2^*|^{\frac{1}{r_2}} \right|^{1-r_2} \frac{d(-[z_2^*]^{\frac{1}{r_2}})}{dt} ds \leq \frac{L}{2}|\xi_1|^{2+\omega} + c_{1,1}L|\xi_2|^{2+\omega} \quad (16)$$

此外, 根据引理 1 和引理 2, 如下不等式成立

$$L\xi_1(z_2 - z_2^*) \leq \frac{L}{2}|\xi_1|^{2+\omega} + c_{1,2}L|\xi_2|^{2+\omega} \quad (17)$$

其中, $c_{1,2}$ 为正常数.

将式 (16) 和式 (17) 代入式 (15) 并设计虚拟控制器 $z_3^* = -\alpha_2[\xi_2]^{r_3}$, $\alpha_2 \geq (n - \frac{3}{4}) + c_{1,1} + c_{1,2}$, 可得

$$\dot{V}_2 \leq -\left(n - \frac{3}{4}\right)L \sum_{i=1}^2 |\xi_i|^{2+\omega} + L[\xi_2]^{2-r_2}(z_3 - z_3^*) \quad (18)$$

类似于步骤 1 和步骤 2, 存在如下虚拟控制器 z_i^* , $i = 1, \dots, n$, 即

$$\begin{aligned} z_1^* &= 0, & \xi_1 &= [z_1]^{\frac{1}{r_1}} - [z_1^*]^{\frac{1}{r_1}} \\ z_i^* &= -\alpha_{i-1}[\xi_{i-1}]^{r_i}, & \xi_i &= [z_i]^{\frac{1}{r_i}} - [z_i^*]^{\frac{1}{r_i}}, \\ & & & i = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (19)$$

和 Lyapunov 函数

$$V_n = \frac{1}{2}z_1^2 + \sum_{i=2}^n \int_{z_i^*}^{z_i} \left[|s|^{\frac{1}{r_i}} - |z_i^*|^{\frac{1}{r_i}}\right]^{2-r_i} ds$$

使得

$$\dot{V}_n \leq -\frac{5}{4}L \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + L[\xi_n]^{2-r_n}(v - z_{n+1}^*) \quad (20)$$

其中, $z_{n+1}^* = -\alpha_n[\xi_n]^{r_{n+1}}$, $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ 为正常数.

注 2. 齐次占优思想分为两个步骤: 首先, 在不考虑系统非线性函数的条件下, 针对标称系统设计含有可调增益的控制器; 然后, 根据非线性函数的增长率, 调整增益值来抵消非线性项对系统的影响.

2.3 无记忆输出反馈采样控制器的设计

为了估计不可量测状态, 设计如下齐次降维观测器

$$\begin{cases} \dot{\hat{\eta}}_2(t) = -Ll_2[\hat{\eta}_2(t) + l_2z_1(t_k)]^{\frac{r_2}{r_1}} \\ \hat{z}_2(t_k) = [\hat{\eta}_2(t_k) + l_2z_1(t_k)]^{\frac{r_2}{r_1}} \\ \dot{\hat{\eta}}_i(t) = -Ll_i[\hat{\eta}_i(t) + l_i\hat{z}_{i-1}(t_k)]^{\frac{r_i}{r_{i-1}}} \\ \hat{z}_i(t_k) = [\hat{\eta}_i(t_k) + l_i\hat{z}_{i-1}(t_k)]^{\frac{r_i}{r_{i-1}}}, i = 3, \dots, n \end{cases} \quad (21)$$

其中, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k = kT, k = 0, 1, \dots, T$ 为采

样周期, $l_i > 0, i = 2, \dots, n$ 为设计参数.

基于观测器 (21), 设计如下采样控制器

$$v(t) = v(t_k) = -\alpha_n [\hat{\xi}_n(t_k)]^{r_n + \omega}, \forall t \in [t_k, t_{k+1}) \quad (22)$$

其中, $\hat{\xi}_n(t_k) = [\hat{z}_n(t_k)]^{\frac{1}{r_n}} + \alpha_{n-1}^{\frac{1}{r_n}} ([\hat{z}_{n-1}(t_k)]^{\frac{1}{r_{n-1}}} + \dots + \alpha_2^{\frac{1}{r_3}} ([\hat{z}_2(t_k)]^{\frac{1}{r_2}} + \alpha_1^{\frac{1}{r_2}} z_1(t_k)))$.

注 3. 根据式 (21), 齐次降维观测器只用到了系统输出在采样时刻的信息. 此外, 与文献 [24–26] 中的观测器相比, 本文设计的观测器充分考虑了低阶非线性项的影响, 解决了不可测量状态带来的困难. 另一方面, 降维观测器 (21) 由 $n-1$ 个“子观测器”构成. 对于第 1 个“子观测器”, 通过 $z_1(t_k)$ 的信息得到 $\hat{\eta}_2(t_k)$ 和 $\hat{z}_2(t_k)$. 进一步, 根据 $\hat{z}_2(t_k)$, 由第 2 个“子观测器”得到 $\hat{\eta}_3(t_k)$ 和 $\hat{z}_3(t_k)$. 类似地, 前一个观测器的输出作为后一个观测器的输入, 可以得到估计状态 $\hat{z}_2(t_k), \dots, \hat{z}_n(t_k)$.

下面确定 $l_i, i = 2, \dots, n$ 的取值. 首先, 对于 $i = 2, \dots, n$, 定义 $\eta_i = [z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}} - l_i z_{i-1}$ 和观测误差 $\varepsilon_i = \eta_i - \hat{\eta}_i$, 计算可得

$$\varepsilon_i = [z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}} - l_i z_{i-1} - \hat{\eta}_i \quad (23)$$

根据式 (21) 和式 (23) 可知

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i &= \frac{r_i-1}{r_i} L |z_i|^{-\frac{\omega}{r_i}} z_{i+1} + l_i L \left([\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}(t_k)]^{\frac{r_i}{r_i-1}} - \right. \\ &\quad \left. [\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) - l_i L (z_i - \hat{z}_i) \end{aligned} \quad (24)$$

其中, $\hat{z}_1 = z_1, z_{n+1} = v$.

选择 Lyapunov 函数 $U = V_n + \sum_{i=2}^n \frac{r_i-1}{2} |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}}$. 根据式 (20) 和式 (24), U 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq -\frac{5}{4} L \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} - \sum_{i=2}^n l_i L |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} (z_i - \hat{z}_i) + \\ &\quad \sum_{i=2}^n l_i L |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} \left([\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}(t_k)]^{\frac{r_i}{r_i-1}} - \right. \\ &\quad \left. [\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) + L |\xi_n|^{2-r_n} (v - z_{n+1}^*) + \\ &\quad \sum_{i=2}^n \frac{r_i-1}{r_i} L |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} |z_i|^{-\frac{\omega}{r_i}} z_{i+1} \end{aligned} \quad (25)$$

下面对式 (25) 中的各项进行估计. 首先, 根据式 (19)、引理 1 和引理 4, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{r_i-1}{r_i} L |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} |z_i|^{-\frac{\omega}{r_i}} z_{i+1} &\leq \\ \frac{L}{16} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + L \sum_{i=2}^{n-1} c_{2,i} |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \end{aligned} \quad (26)$$

其中, $c_{2,i}, i = 2, \dots, n-1$ 为正常数.

对于 $i = 2, \dots, n$, 根据式 (21) 和数学归纳法, 系统状态 z_i 与其估计值 \hat{z}_i 之间的误差为

$$|z_i - \hat{z}_i| \leq \bar{c}_{2,i} |\varepsilon_i|^{\frac{r_i}{r_i-1}} + \sum_{j=2}^{i-1} g_{1,j}(l_{j+1}, \dots, l_i) |\varepsilon_j|^{\frac{r_i}{r_j-1}} \quad (27)$$

其中, $\bar{c}_{2,i}$ 为正常数, $g_{1,j}(l_{j+1}, \dots, l_i), j = 2, \dots, i-1$ 是与 l_{j+1}, \dots, l_i 有关的函数.

另一方面, 由式 (27)、引理 1 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} |\hat{z}_i|^{\frac{1}{r_i}} &= |\eta_i + l_i z_{i-1} + \hat{\eta}_i - \eta_i + \\ &\quad l_i (\hat{z}_{i-1} - z_{i-1})|^{\frac{1}{r_i-1}} \leq \\ &\quad \tilde{c}_{2,i} \left(|\xi_i| + |\xi_{i-1}| + |\varepsilon_i|^{\frac{1}{r_i-1}} \right) + \\ &\quad \sum_{j=2}^{i-1} \bar{g}_{1,j}(l_{j+1}, \dots, l_i) |\varepsilon_j|^{\frac{1}{r_j-1}} \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\tilde{c}_{2,i}$ 为正常数, $\bar{g}_{1,j}(l_{j+1}, \dots, l_i), j = 2, \dots, i-1$ 是与 l_{j+1}, \dots, l_i 有关的函数.

结合式 (19), (22), (27), (28) 以及引理 1 和引理 4, 如下不等式成立

$$\begin{aligned} \frac{r_{n-1}}{r_n} L |\varepsilon_n|^{\frac{2}{r_n-1}-1} |z_n|^{-\frac{\omega}{r_n}} v &\leq \\ \frac{L}{16} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + \hat{c}_2 L \left(\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + \right. \\ &\quad \left. |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) + L \hat{c}_{2,n} |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} + \\ &\quad L \sum_{i=2}^{n-1} (\hat{c}_{2,i} + \hat{g}_{1,i}(l_{i+1}, \dots, l_n)) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \end{aligned} \quad (29)$$

其中, \hat{c}_2 为正常数, $\hat{g}_{1,i}(l_{i+1}, \dots, l_n), i = 2, \dots, n-1$ 是与 l_{i+1}, \dots, l_n 有关的函数.

因此, 由式 (26) 和式 (29), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n \frac{r_i-1}{r_i} L |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} |z_i|^{-\frac{\omega}{r_i}} z_{i+1} &\leq \\ \frac{L}{8} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + \hat{c}_2 L \left(\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + \right. \\ &\quad \left. |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) + L \hat{c}_{2,n} |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} + \\ &\quad L \sum_{i=2}^{n-1} (\check{c}_{2,i} + \hat{g}_{1,i}(l_{i+1}, \dots, l_n)) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $\check{c}_{2,i} = c_{2,i} + \hat{c}_{2,i}, i = 2, \dots, n-1$.

当 $\varepsilon_i \neq 0, i = 2, \dots, n$ 时, 利用式 (19) 和式 (21) 得到

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=2}^n l_i L[\varepsilon_i]^{\frac{2}{r_i-1}-1} (z_i - \hat{z}_i) = \\
 & L \sum_{i=2}^n l_i [\varepsilon_i]^{\frac{2}{r_i-1}-1} \left(z_i - [\hat{\eta}_i + l_i z_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) + \\
 & L \sum_{i=3}^n l_i [\varepsilon_i]^{\frac{2}{r_i-1}-1} \left([\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} - \right. \\
 & \left. [\hat{\eta}_i + l_i z_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) \leq \\
 & -L \sum_{i=2}^n l_i |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \left(\left[1 - \frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{\frac{r_i}{r_i-1}} + \right. \\
 & \left. \left[\frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{\frac{r_i}{r_i-1}} + l_i^{\frac{-2r_i-1}{r_i+r_i-1}} \left[\frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{1+\frac{r_i}{r_i-1}} \right) + \\
 & L \sum_{i=2}^n l_i^{\frac{\omega}{r_i+r_i-1}} |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-2} [z_i]^{\frac{r_i-1+r_i}{r_i}} + \\
 & L \sum_{i=3}^n 2^{1-\frac{r_i}{r_i-1}} l_i |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} |l_i (z_{i-1} - \hat{z}_{i-1})|^{\frac{r_i}{r_i-1}} \quad (31)
 \end{aligned}$$

下面对式 (31) 中的各项进行估计. 首先, 根据引理 5, 可得

$$\begin{aligned}
 & -L \sum_{i=2}^n l_i |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \left(l_i^{\frac{-2r_i-1}{r_i+r_i-1}} \left[\frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{1+\frac{r_i}{r_i-1}} + \right. \\
 & \left. \left[1 - \frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{\frac{r_i}{r_i-1}} + \left[\frac{[z_i]^{\frac{r_i-1}{r_i}}}{\varepsilon_i} \right]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) \leq \\
 & -L \sum_{i=2}^n h_i(l_i) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (32)
 \end{aligned}$$

其中, $h_i(l_i) = (2^{\frac{r_i}{r_i-1}} - 1) l_i^{\frac{2r_i}{r_i-1+r_i}}$.

进一步, 利用式 (19)、引理 1 和引理 4, 如下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & L \sum_{i=2}^n l_i^{\frac{\omega}{r_i+r_i-1}} |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-2} [z_i]^{\frac{r_i-1+r_i}{r_i}} \leq \\
 & \frac{L}{16} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + L \sum_{i=2}^n g_{2,i}(l_i) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (33)
 \end{aligned}$$

其中, $g_{2,i}(l_i), i = 2, \dots, n$ 是与 l_i 有关的函数.

对于式 (31) 中的最后一项, 根据式 (27) 和引理 1, 可得

$$\begin{aligned}
 & L \sum_{i=3}^n 2^{1-\frac{r_i}{r_i-1}} l_i |\varepsilon_i|^{\frac{2}{r_i-1}-1} |l_i (z_{i-1} - \hat{z}_{i-1})|^{\frac{r_i}{r_i-1}} \leq \\
 & L c_3 |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} + L \sum_{i=2}^{n-1} \bar{g}_{2,i}(l_{i+1}, \dots, l_n) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (34)
 \end{aligned}$$

其中, c_3 为正常数, $\bar{g}_{2,i}(l_{i+1}, \dots, l_n), i = 2, \dots, n-1$ 是与 l_{i+1}, \dots, l_n 有关的函数.

将式 (32) ~ (34) 代入式 (31), 得到

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=2}^n l_i L[\varepsilon_i]^{\frac{2}{r_i-1}-1} (z_i - \hat{z}_i) \leq \\
 & \frac{L}{16} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} - L(h_n(l_n) - c_3 - \\
 & g_{2,n}(l_n)) |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} - L \sum_{i=2}^{n-1} (h_i(l_i) - g_{2,i}(l_i) - \\
 & \bar{g}_{2,i}(l_{i+1}, \dots, l_n)) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (35)
 \end{aligned}$$

此外, 当 $\varepsilon_i = 0, i = 2, \dots, n$ 时, 式 (35) 显然成立.

进一步, 利用引理 1 和引理 2, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=2}^n l_i L[\varepsilon_i]^{\frac{2}{r_i-1}-1} \left([\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}(t_k)]^{\frac{r_i}{r_i-1}} - \right. \\
 & \left. [\hat{\eta}_i + l_i \hat{z}_{i-1}]^{\frac{r_i}{r_i-1}} \right) \leq \frac{L}{8} \sum_{i=2}^n |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} + \\
 & L g_{3,2}(l_2) |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} + \\
 & L \sum_{i=3}^n g_{3,i}(l_i) |\hat{z}_{i-1} - \hat{z}_{i-1}(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (36)
 \end{aligned}$$

其中, $g_{3,i}(l_i), i = 2, \dots, n$ 是与 l_i 有关的函数.

结合式 (20) 和式 (22), 以及引理 1 和引理 4, 计算得到

$$\begin{aligned}
 & L[\xi_n]^{2-r_n} (v - z_{n+1}^*) \leq \frac{L}{32} |\xi_n|^{2+\omega} + \\
 & c_4 L \left(|\xi_n - \hat{\xi}_n|^{2+\omega} + |\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_n(t_k)|^{2+\omega} \right) \quad (37)
 \end{aligned}$$

其中, c_4 为正常数.

因此, 根据式 (19), (22), (27) 以及引理 1 和引理 2, 如下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & c_4 L |\xi_n - \hat{\xi}_n|^{2+\omega} \leq \\
 & L c_{4,1} \left(\sum_{i=2}^n \left| [z_i]^{\frac{1}{r_i}} - [\hat{z}_i]^{\frac{1}{r_i}} \right| \right)^{2+\omega} \leq \\
 & \frac{L}{32} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + L c_{4,2} \sum_{i=2}^n |z_i - \hat{z}_i|^{\frac{2+\omega}{r_i}} \leq \\
 & \frac{L}{32} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + \bar{c}_{4,n} L |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} +
 \end{aligned}$$

$$L \sum_{i=2}^{n-1} (\bar{g}_{3,i}(l_{i+1}, \dots, l_n) + \bar{c}_{4,i}) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \quad (38)$$

其中, $c_{4,1}, c_{4,2}, \bar{c}_{4,i}, i=2, \dots, n$ 为正常数, $\bar{g}_{3,i}(l_{i+1}, \dots, l_n), i=2, \dots, n-1$ 是与 l_{i+1}, \dots, l_n 有关的函数.

将式 (30) 和式 (35) ~ (38) 代入式 (25), 可得

$$\begin{aligned} \dot{U} \leq & -L \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} - L(g_{4,n}(l_n) - \tilde{c}_{4,n}) |\varepsilon_n|^{\frac{2+\omega}{r_n-1}} - \\ & L \sum_{i=2}^{n-1} (g_{4,i}(l_i) - \bar{g}_{4,i}(l_{i+1}, \dots, l_n) - \tilde{c}_{4,i}) |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} + \\ & c_4 L |\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_n(t_k)|^{2+\omega} + L \hat{c}_2 |\hat{z}_n - \hat{z}_n(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_n}} + \\ & L \sum_{i=2}^{n-1} (\hat{c}_2 + g_{3,i+1}(l_{i+1})) |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + \\ & L(\hat{c}_2 + g_{3,2}(l_2)) |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \end{aligned} \quad (39)$$

其中, $g_{4,i}(l_i) = h_i(l_i) - g_{2,i}(l_i), i=2, \dots, n; \bar{g}_{4,i}(\cdot) = \hat{g}_{1,i}(\cdot) + \bar{g}_{2,i}(\cdot) + \bar{g}_{3,i}(\cdot), i=2, \dots, n-1; \tilde{c}_{4,n} = \hat{c}_{2,n} - c_3 - \bar{c}_{4,n} - 1/8; \tilde{c}_{4,i} = \hat{c}_{2,i} - \bar{c}_{4,i} - 1/8, i=2, \dots, n-1.$

根据以上分析, 存在 l_2, \dots, l_n 和 $\bar{c}_4 > 0$, 使得

$$\begin{aligned} \dot{U} \leq & -L \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + \sum_{i=2}^n |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \right) + \bar{c}_4 L \times \\ & \left(\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) + \\ & c_4 L |\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_n(t_k)|^{2+\omega} \end{aligned} \quad (40)$$

下面对式 (40) 中的各项进行处理. 首先, 定义向量 $[z_1, \dots, z_n, \hat{\eta}_2, \dots, \hat{\eta}_n]^T$ 及其扩张 $\tilde{\Delta} = [r_1, \dots, r_n, r_1, \dots, r_{n-1}]^T$, 由定义 1 得 U 的齐次度为 2. 因此, 根据引理 6, 如下不等式成立

$$\tilde{\rho} U^{\frac{2+\omega}{2}} \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{2+\omega} + \sum_{i=2}^n |\varepsilon_i|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \leq \bar{\rho} U^{\frac{2+\omega}{2}} \quad (41)$$

其中, $\tilde{\rho}$ 和 $\bar{\rho}$ 均为正常数.

进一步, 利用式 (19), (22), (28), (41), 以及引理 1 和引理 2, 可以得到

$$\begin{aligned} c_4 L |\hat{\xi}_n - \hat{\xi}_n(t_k)|^{2+\omega} \leq & L \tilde{c}_{4,1} \left(|z_1 - z_1(t_k)| + \right. \\ & \left. \sum_{i=2}^n \left| |\hat{z}_i|^{\frac{1}{r_i}} - |\hat{z}_i(t_k)|^{\frac{1}{r_i}} \right| \right)^{2+\omega} \leq \\ & \frac{1}{16} \tilde{\rho} L U^{\frac{2+\omega}{2}} + \tilde{c}_4 L \left(\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + \right. \\ & \left. |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) \end{aligned} \quad (42)$$

其中, $\tilde{c}_{4,1}$ 和 \tilde{c}_4 均为正常数.

将式 (42) 代入式 (40), 可得如下 U 关于系统 (9) 的导数

$$\begin{aligned} \dot{U}|_{(9)} \leq & -\frac{15}{16} \tilde{\rho} L U^{\frac{2+\omega}{2}} + \hat{c}_4 L \left(\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + \right. \\ & \left. |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial z_i} \bar{\psi}_i(\cdot) + \\ & L \frac{\partial U}{\partial z_n} (v(t-\theta) - v(t)) \end{aligned} \quad (43)$$

其中, $\hat{c}_4 = \bar{c}_4 + \tilde{c}_4.$

注 4. 如何根据式 (43) 确定最大允许采样周期和最大允许输入时滞是本文的主要难点之一. 对于满足如下线性增长条件的非线性系统

$$|\psi_i(\cdot)| \leq c(x_1(t) + \dots + x_i(t)), i=1, \dots, n \quad (44)$$

文献 [19-20] 提供了最大允许输入时滞的确定方法, 文献 [24-26] 提供了最大允许采样周期的确定方法. 然而, 对于满足假设 1 的非线性系统, 系统中的低阶非线性项导致上述文献中的方法不再适用. 为此, 本文将利用齐次系统理论和 Gronwall-Bellman 不等式, 给出最大允许采样周期和最大允许输入时滞的确定方法.

由于 $\frac{\partial U}{\partial z_i}$ 和 $\bar{\psi}_i(\cdot)$ 的齐次度分别为 $2 - r_i$ 和 r_{i+1} , 根据式 (10) 和引理 6, 得

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial z_i} \bar{\psi}_i(\cdot) \leq \sum_{i=1}^n c_{5,i} L^{1-\frac{1}{r_i}} U^{\frac{2+\omega}{2}} \quad (45)$$

其中, $c_{5,i}, i=1, \dots, n$ 为正常数.

选择 L 满足 $\sum_{i=1}^n c_{5,i} L^{1-\frac{1}{r_i}} \leq \frac{1}{8} \tilde{\rho}$, 由式 (45) 可得 $\sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial z_i} \bar{\psi}_i(\cdot) \leq \frac{L}{8} \tilde{\rho} U^{\frac{2+\omega}{2}}$. 由于 $|\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)| \leq \int_{t_k}^t |\hat{\eta}_i(s)| ds, i=2, \dots, n$, 利用定义 1、引理 4、引理 6 和式 (21), 可以得到

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)| \leq & c_{6,i} \int_{t_k}^t \left(\sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s)|^{\frac{2}{r_j-1}} + \right. \\ & \left. \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{2}{r_j-1}} + |z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} \right)^{\frac{r_i}{2}} ds \leq \\ & \int_{t_k}^t \left(\bar{c}_{6,i} \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s) - \hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{r_i}{r_j-1}} + \pi_i \right) ds \end{aligned} \quad (46)$$

其中, $c_{6,i}$ 为正常数, $\bar{c}_{6,i} = 2^{\frac{r_i}{n-1} - \frac{r_i}{2}} c_{6,i}, \pi_i = c_{6,i} (\sum_{j=2}^n (2^{\frac{2-r_j-1}{r_j-1}} + 1)^{\frac{r_i}{2}} |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{r_i}{r_j-1}} + |z_1(t_k)|^{\frac{r_i}{r_1}}).$

结合式 (46) 和引理 7, 如下不等式成立

$$|\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)| \leq T^{\frac{2-r_i}{2}} \left(n^{\frac{2-r_i}{r_i}} \times \int_{t_k}^t \left(\bar{c}_{6,i}^{\frac{2}{r_i}} \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s) - \hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{2}{r_j-1}} + \pi_i^{\frac{2}{r_i}} \right) ds \right)^{\frac{r_i}{2}} \tag{47}$$

由于 $\frac{r_i}{r_i-1} \in (0, 1)$, 根据式 (47), 可得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_i-1}} \leq \sigma(T) \times \int_{t_k}^t \left(\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(s) - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_i-1}} \right) ds + \Pi \tag{48}$$

其中, $\Pi = \sum_{i=2}^n T^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} n^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} (T\pi_i^{\frac{2}{r_i}} + 1)$, $\sigma(T) = \sum_{i=2}^n T^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} n^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} \bar{c}_{6,i}^{\frac{2}{r_i}}$.

根据式 (48), 由 Gronwall-Bellman 不等式计算可得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_i-1}} \leq \Pi e^{T\sigma(T)} \tag{49}$$

进一步, 由 π_i 的定义可知

$$\pi_i^{\frac{2}{r_i}} \leq c_{6,i}^{\frac{2}{r_i}} n^{\frac{2-r_i}{r_i}} \left(|z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} + \sum_{j=2}^n \left(2^{\frac{2-r_j-1}{r_j-1}} + 1 \right) \times |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{2}{r_j-1}} \right) \leq \tilde{c}_{6,i} U(t_k) \tag{50}$$

其中, $\tilde{c}_{6,i}$ 为正常数.

因此, 结合式 (48) 和式 (50), 可以得到

$$\Pi \leq \sigma_1(T)U(t_k) + \Pi_1(T) \tag{51}$$

其中,

$$\sigma_1(T) = \sum_{i=2}^n T^{\frac{2-\omega}{r_i-1}} n^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} \tilde{c}_{6,i}$$

$$\Pi_1(T) = \sum_{i=2}^n T^{\frac{2-r_i}{r_i-1}} n^{\frac{2-r_i}{r_i-1}}$$

将式 (51) 代入式 (49), 可得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_i-1}} \leq \sigma_1(T)e^{T\sigma(T)}U(t_k) + \Pi_1(T)e^{T\sigma(T)} \tag{52}$$

根据以上分析, 如下不等式成立

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \leq \sigma_2(T)U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + \Pi_2(T) \tag{53}$$

其中

$$\sigma_2(T) = n^{-\frac{\omega}{2}} \sigma_1^{\frac{2+\omega}{2}}(T) e^{\frac{(2+\omega)T\sigma(T)}{2}}$$

$$\Pi_2(T) = n^{-\frac{\omega}{2}} \Pi_1^{\frac{2+\omega}{2}}(T) e^{\frac{(2+\omega)T\sigma(T)}{2}}$$

定义 $U_{\max}(t) = \max_{\forall \tau \in [t_k, t]} U(\tau)$, 根据式 (9), 存在正常数 c_6 , 使得

$$|z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} = \left| \int_{t_k}^t \dot{z}_1(s) ds \right|^{2+\omega} \leq c_6 T^{2+\omega} U_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) \tag{54}$$

由引理 2 和式 (21), (53), (54), 存在正常数 \bar{c}_6 , 使得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{z}_i - \hat{z}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} + |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \leq \bar{c}_6 \left(\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i - \hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} + |z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} \right) \leq \bar{\sigma}_2(T)U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + \bar{\Pi}_2(T) + \tilde{c}_6 T^{2+\omega} U_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) \tag{55}$$

其中, $\tilde{c}_6 = c_6 \bar{c}_6$, $\bar{\sigma}_2(T) = \bar{c}_6 \sigma_2(T)$, $\bar{\Pi}_2(T) = \bar{c}_6 \Pi_2(T)$. 因此, 式 (43) 可以写为

$$\dot{U}|_{(9)} \leq -\frac{13}{16} \tilde{\rho} L U^{\frac{2+\omega}{2}} + L \tilde{\sigma}_2(T) U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + L \hat{c}_6 T^{2+\omega} U_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) + L \tilde{\Pi}_2(T) + L \frac{\partial U}{\partial z_n}(v(t-\theta) - v(t)) \tag{56}$$

其中, $\hat{c}_6 = \hat{c}_4 \tilde{c}_6$, $\tilde{\sigma}_2(T) = \hat{c}_4 \bar{\sigma}_2(T)$, $\tilde{\Pi}_2(T) = \hat{c}_4 \bar{\Pi}_2(T)$. 下面估计式 (56) 中的最后一项. 首先, 根据引理 1、引理 2、引理 6, 以及式 (21), (22), (42), 可得

$$L \frac{\partial U}{\partial z_n}(v(t-\theta) - v(t)) \leq \frac{1}{16} \tilde{\rho} L \left(U^{\frac{2+\omega}{2}} + U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) \right) + \bar{c}_7 L \left(|z_1(t_k) - z_1(t_k - \theta)|^{2+\omega} + \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2+\omega}{r_i-1}} \right) \tag{57}$$

其中, \bar{c}_7 为正常数. 此外, 对于 $i = 2, \dots, n$ 以及 $t_1 \in [t_k - \theta, t_k)$, 如下不等式成立

$$|\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)| \leq c_{7,i} \int_{t_k - \theta}^{t_1} \left(\sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s)|^{\frac{2}{r_j-1}} + \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{2}{r_j-1}} + |z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} \right)^{\frac{r_i}{2}} ds \leq \int_{t_k}^{t_1} \left(\bar{c}_{7,i} \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s) - \hat{\eta}_j(t_k - \theta)|^{\frac{r_i}{r_j-1}} + \bar{\pi}_i \right) ds \tag{58}$$

其中, $c_{7,i}$ 为正常数且

$$\begin{aligned} \bar{c}_{7,i} &= 2^{\frac{r_i}{r_{n-1}} - \frac{r_i}{2}} c_{7,i} \\ \bar{\pi}_i &= c_{7,i} \left(\sum_{j=2}^n 2^{\frac{r_i(2-r_{j-1})}{2r_{j-1}}} |\hat{\eta}_j(t_k - \theta)|^{\frac{r_i}{r_{j-1}}} + \right. \\ &\quad \left. |z_1(t_k)|^{\frac{r_i}{r_1}} + \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{r_i}{r_{j-1}}} \right) \end{aligned}$$

类似于式 (47) 中的分析方法, 可以得到

$$\begin{aligned} |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)| &\leq \theta^{\frac{2-r_i}{2}} \left(n^{\frac{2-r_i}{r_i}} \int_{t_k-\theta}^{t_1} \left(\bar{\pi}_i^{\frac{2}{r_i}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \bar{c}_{7,i}^{\frac{2}{r_i}} \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(s) - \hat{\eta}_j(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{j-1}}} \right) ds \right)^{\frac{r_i}{2}} \end{aligned} \quad (59)$$

进一步, 利用式 (59), 计算可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} &\leq \bar{\sigma}(\theta) \times \\ &\int_{t_k-\theta}^{t_1} \left(\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(s) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} \right) ds + \bar{\Pi} \end{aligned} \quad (60)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} (\theta \bar{\pi}_i^{\frac{2}{r_i}} + 1) \\ \bar{\sigma}(\theta) &= \sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} \bar{c}_{7,i}^{\frac{2}{r_i}} \end{aligned}$$

根据式 (60) 和 Gronwall-Bellman 不等式, 可得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} \leq \bar{\Pi} e^{\theta \bar{\sigma}(\theta)} \quad (61)$$

由引理 2, 存在正常数 $\tilde{c}_{7,i}$, 使得

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i^{\frac{2}{r_i}} &\leq \tilde{c}_{7,i} \left(\sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_1)|^{\frac{2}{r_{j-1}}} + \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_k)|^{\frac{2}{r_{j-1}}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=2}^n |\hat{\eta}_j(t_1) - \hat{\eta}_j(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{j-1}}} + |z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

因此, 结合式 (61) 和式 (62), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} &\leq \\ e^{\theta \bar{\sigma}(\theta)} &\left(\sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-\omega}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} \bar{\pi}_i^{\frac{2}{r_i}} + \sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} \right) \leq \\ \sigma_3(\theta) &\left(\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} + |z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} + \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} \right) + \Pi_3(\theta) \end{aligned} \quad (63)$$

其中

$$\begin{aligned} \Pi_3(\theta) &= e^{\theta \bar{\sigma}(\theta)} \sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} \\ \sigma_3(\theta) &= e^{\theta \bar{\sigma}(\theta)} \sum_{i=2}^n \theta^{\frac{2-\omega}{r_{i-1}}} n^{\frac{2-r_i}{r_{i-1}}} \tilde{c}_{7,i} \end{aligned}$$

根据式 (63), 当输入时滞满足 $1 - \sigma_3(\theta) > 0$ 时, 如下不等式成立

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} &\leq \\ \frac{\sigma_3(\theta)}{1 - \sigma_3(\theta)} &\left(|z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} + \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_1)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} \right) + \frac{\Pi_3(\theta)}{1 - \sigma_3(\theta)} \end{aligned} \quad (64)$$

进一步, 由引理 6 可得

$$\sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} + |z_1(t_k)|^{\frac{2}{r_1}} \leq \tilde{c}_7 U(t_k) \quad (65)$$

其中, \tilde{c}_7 为正常数.

注意到 $\hat{\eta}_i(t_k)$ 的连续性, 由式 (64) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2}{r_{i-1}}} &\leq \\ \bar{\sigma}_3(\theta) U(t_k) + \bar{\Pi}_3(\theta) \end{aligned} \quad (66)$$

其中, $\bar{\sigma}_3(\theta) = \frac{2\tilde{c}_7\sigma_3(\theta)}{1-\sigma_3(\theta)}$, $\bar{\Pi}_3(\theta) = \frac{\Pi_3(\theta)}{1-\sigma_3(\theta)}$.

根据以上分析, 可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{c}_7 L \sum_{i=2}^n |\hat{\eta}_i(t_k) - \hat{\eta}_i(t_k - \theta)|^{\frac{2+\omega}{r_{i-1}}} &\leq \\ L \tilde{\sigma}_3(\theta) U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + L \tilde{\Pi}_3(\theta) \end{aligned} \quad (67)$$

其中, $\tilde{\sigma}_3(\theta) = \tilde{c}_7 n^{-\frac{\omega}{2}} \bar{\sigma}_3^{\frac{2+\omega}{2}}(\theta)$, $\tilde{\Pi}_3(\theta) = \tilde{c}_7 n^{-\frac{\omega}{2}} \bar{\Pi}_3^{\frac{2+\omega}{2}}(\theta)$.

进一步, 利用引理 2, 可得

$$\begin{aligned} |z_1(t_k) - z_1(t_k - \theta)|^{2+\omega} &\leq 2^{1+\omega} (|z_1 - z_1(t_k)|^{2+\omega} + \\ &\quad |z_1 - z_1(t_k - \theta)|^{2+\omega}) \end{aligned} \quad (68)$$

根据引理 7, 存在正常数 \bar{c}_7 , 使得

$$\begin{aligned} |z_1 - z_1(t_k - \theta)|^{2+\omega} &\leq \bar{c}_7 (T + \theta)^{1+\omega} \times \\ &\int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \end{aligned} \quad (69)$$

因此, 结合式 (54), (68), (69), 可得

$$\begin{aligned} \tilde{c}_7 L |z_1(t_k) - z_1(t_k - \theta)|^{2+\omega} &\leq \\ \hat{c}_7 L &\left(T^{2+\omega} U_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) + (T + \theta)^{1+\omega} \times \right. \\ &\quad \left. \int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \right) \end{aligned} \quad (70)$$

其中, $\hat{c}_7 = \max\{2^{1+\omega}c_6\bar{c}_7, 2^{1+\omega}\bar{c}_7\bar{c}_7\}$.

根据式 (57), (67), (70), 可以将式 (56) 写为

$$\begin{aligned} \dot{U}|_{(9)} \leq & -\frac{3}{4}\tilde{\rho}LU^{\frac{2+\omega}{2}} + L\Lambda_1(T, \theta)U^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + \\ & \check{c}_7LT^{2+\omega}V_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) + L\Lambda_2(T, \theta) + \\ & \hat{c}_7L(T+\theta)^{1+\omega} \times \\ & \int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \end{aligned} \quad (71)$$

其中, $\check{c}_7 = \hat{c}_6 + \hat{c}_7$, $\Lambda_1(T, \theta) = \tilde{\sigma}_2(T) + \tilde{\sigma}_3(\theta) + \frac{1}{16}\tilde{\rho}$, $\Lambda_2(T, \theta) = \tilde{\Pi}_2(T) + \tilde{\Pi}_3(\theta)$.

选择 $V = U + U_1$, 其中, $U_1 = 2\hat{c}_7L(T+\theta)^{1+\omega} \times \int_{t-T-\theta}^t \int_s^t (|z_2(\tau)| + |z_1(\tau)|^{r_2})^{2+\omega} d\tau ds$. 根据式 (71), 如下不等式成立

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(9)} \leq & -\frac{3}{4}\tilde{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}} + L\Lambda_1(T, \theta)V^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + \\ & L\Lambda_3(T, \theta)V_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) + L\Lambda_2(T, \theta) - \\ & \hat{c}_7L(T+\theta)^{1+\omega} \times \\ & \int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \end{aligned} \quad (72)$$

其中, $\Lambda_3(T, \theta) = \check{c}_7T^{2+\omega} + c_8(T+\theta)^{2+\omega}$, c_8 为正常数.

注 5. 对于满足线性增长条件的非线性系统, 文献 [24–26] 给出了闭环系统稳定性的分析方法. 然而, 根据式 (72) 可知, $U^{\frac{2+\omega}{2}}$, $V^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k)$, $V_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t)$ 和积分项的存在使得上述文献中的方法不再适用. 为此, 第 2.4 节将基于式 (72), 完成闭环系统的稳定性分析.

2.4 稳定性分析

定理 1. 对于满足假设 1 的非线性系统 (1), 存在最大允许采样周期 T_m 和最大允许输入时滞 θ_m , 当 $T \in (0, T_m]$ 和 $\theta \in [0, \theta_m]$ 时, 控制器 (22) 能够保证闭环系统的所有信号一致最终有界. 最大允许采样周期 T_m 和最大允许输入时滞 θ_m 满足 $1 - \sigma_3(\theta_m) > 0$, $\Lambda_1(T_m, \theta_m) \leq \frac{3}{16}\tilde{\rho}$. 闭环系统状态 $x(t)$ 的终端界为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| \leq \max\{\bar{\gamma}_2\bar{\Lambda}_2(T, \theta), \bar{\gamma}_3\bar{\Lambda}_3(T, \theta)\} \quad (73)$$

其中, $\bar{\gamma}_2$ 和 $\bar{\gamma}_3$ 为正常数且

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_2(\cdot) &= \gamma_2\Lambda_2^{\frac{2}{2+\omega}}(\cdot) + \gamma_1(T+\theta)^{-\frac{2}{\omega}} \\ \bar{\Lambda}_3(\cdot) &= \gamma_3\Lambda_3^{-\frac{2}{\omega(2+\omega)}}(\cdot) + \gamma_1(T+\theta)^{-\frac{2}{\omega}} \end{aligned}$$

证明. 首先, 根据 U_1 的定义可得

$$\begin{aligned} -\hat{c}_7L(T+\theta)^{1+\omega} \int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + \\ |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \leq -\frac{1}{2(T+\theta)}U_1 \end{aligned} \quad (74)$$

假设存在集合 Ω_1 , 对于集合 Ω_1 外的状态, 如下不等式成立

$$\begin{aligned} -\hat{c}_7L(T+\theta)^{1+\omega} \int_{t-T-\theta}^t (|z_2(s)| + \\ |z_1(s)|^{r_2})^{2+\omega} ds \leq -\frac{3}{4}\tilde{\rho}LU_1^{\frac{2+\omega}{2}} \end{aligned} \quad (75)$$

根据式 (74) 和式 (75), 当如下条件满足时, 式 (75) 成立

$$-\frac{1}{2(T+\theta)}U_1 \leq -\frac{3}{4}\tilde{\rho}LU_1^{\frac{2+\omega}{2}} \quad (76)$$

因此, 由式 (76) 计算可得

$$U_1 \geq \left(\frac{3}{2}\tilde{\rho}L(T+\theta)\right)^{-\frac{2}{\omega}} = \gamma_1(T+\theta)^{-\frac{2}{\omega}} \quad (77)$$

其中, $\gamma_1 = (\frac{3}{2}\tilde{\rho}L)^{-\frac{2}{\omega}}$.

根据以上分析, 集合 Ω_1 可定义为

$$\Omega_1 = \left\{x \mid U_1 \leq \gamma_1(T+\theta)^{-\frac{2}{\omega}}\right\} \quad (78)$$

此外, 由于 $V^{\frac{2+\omega}{2}} = (U + U_1)^{\frac{2+\omega}{2}} \leq U^{\frac{2+\omega}{2}} + U_1^{\frac{2+\omega}{2}}$, 如下不等式成立

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(9)} \leq & -\frac{3}{4}\tilde{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}} + L\Lambda_3(T, \theta)V_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) + \\ & L\Lambda_1(T, \theta)V^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) + L\Lambda_2(T, \theta) \end{aligned} \quad (79)$$

进一步, 定义集合 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 其中

$$\begin{aligned} \Omega_2 = \left\{x \mid V \leq \max\left\{\gamma_2\Lambda_2^{\frac{2}{2+\omega}}(\cdot), \gamma_3\Lambda_3^{-\frac{2}{\omega(2+\omega)}}(\cdot)\right\}\right\} \\ \gamma_2 = \left(\frac{8}{\tilde{\rho}}\right)^{\frac{2}{2+\omega}}, \gamma_3 = \left(\frac{8}{\tilde{\rho}}\right)^{-\frac{2}{\omega(2+\omega)}} \end{aligned} \quad (80)$$

根据式 (80), 可知

$$\Lambda_2(T, \theta) \leq \frac{1}{8}\tilde{\rho}V^{\frac{2+\omega}{2}} \quad (81)$$

以及

$$\Lambda_3(T, \theta)V_{\max}^{\frac{(1+\omega)(2+\omega)}{2}}(t) \leq \frac{1}{8}\tilde{\rho}V_{\max}^{\frac{2+\omega}{2}}(t) \quad (82)$$

结合式 (79), (81), (82) 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}|_{(9)} \leq & -\frac{5}{8}\tilde{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}} + \frac{1}{8}\tilde{\rho}LV_{\max}^{\frac{2+\omega}{2}}(t) + \\ & L\Lambda_1(T, \theta)V^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) \end{aligned} \quad (83)$$

下面证明, 当系统状态在集合 Ω 外且满足 $\Lambda_1(T, \theta) \leq \frac{3}{16}\tilde{\rho}$ 时, $V_{\max}(t) = V(t_k), \forall t \in [t_k, t_k + T)$. 首

先, 假设存在 $t' \in [t_k, t_k + T)$ 使得 $V(t') > V(t_k)$, 根据式 (83) 可知 $\dot{V}(t_k) < 0, \forall x(t_k) \neq 0$. 因此, 存在 $t'' \in [t_k, t')$, 使得

$$\begin{cases} \dot{V}(t'') > 0, & V(t'') = V(t_k) \\ V(t) \leq V(t_k), & \forall t \in [t_k, t'') \end{cases} \quad (84)$$

然而, 由式 (83) 可得 $\dot{V}(t'') < 0, \forall x(t) \neq 0$, 这与 $\dot{V}(t'') > 0$ 矛盾, 从而证得 $V_{\max}(t) = V(t_k), \forall t \in [t_k, t_k + T)$.

根据以上分析, 式 (83) 可以写为

$$\dot{V}|_{(9)} \leq -2\hat{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}} + \hat{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}}(t_k) \quad (85)$$

其中, $\hat{\rho} = \frac{5}{16}\tilde{\rho}$. 对于任意的 $t \in [t_k, t_k + T)$, 考虑以下两种情形:

$$V > \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{2+\omega}} V(t_k) \quad (86a)$$

$$V \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{2+\omega}} V(t_k) \quad (86b)$$

由于 $\dot{V}(t_k) < 0$, 当式 (86a) 的条件满足时, 如下不等式成立

$$\dot{V}|_{(9)} \leq -\frac{2}{3}\hat{\rho}LV^{\frac{2+\omega}{2}} \quad (87)$$

由式 (87) 可得, 存在 $\check{\rho} \in (0, 1)$ 使得 $V(t_{k+1}) \leq \check{\rho}V(t_k)$. 因此, 当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 闭环系统的所有状态都收敛到集合 Ω 内. 此外, 根据 U 的定义, 闭环系统状态 $x(t)$ 的终端界可以表示为式 (73) 中的形式. 最后, 根据 $\sigma_3(\theta)$ 和 $\Lambda_1(T, \theta)$ 的定义, 存在 T_m 和 θ_m , 当 $T \in (0, T_m]$ 和 $\theta \in [0, \theta_m]$ 时, 上述结果成立. \square

注 6. 根据定理 1, 闭环系统状态的终端界与采样周期和输入时滞有关, 当采样周期相同时, 输入时滞越大, 闭环系统状态的终端界也越大.

注 7. 本文方法能够推广到同时含有输入时滞和状态时滞的非线性系统. 假设系统 (1) 的非线性函数为 $\psi_i(t, x(t), x(t-d))$, $i = 1, \dots, n$ 且满足如下条件

$$|\psi_i(\cdot)| \leq c \sum_{j=1}^i \left(|x_j(t)|^{\frac{r_i+1}{r_j}} + |x_j(t-d_j)|^{\frac{r_i+1}{r_j}} \right) \quad (88)$$

其中, $x(t-d) = [x_1(t-d_1), \dots, x_n(t-d_n)]^T$, $d_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ 表示状态时滞. 利用式 (8) 中的坐标变换引入可调增益 L , 并考虑如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$W = V + c_9 \sum_{i=1}^n \int_{t-d_i}^t |z_i(s)|^{\frac{2+\omega}{r_i}} ds \quad (89)$$

其中, c_9 为正常数. 通过调整 L 的值, 控制器 (22) 能够保证闭环系统的所有信号一致最终有界.

3 仿真

3.1 数值仿真

考虑如下具有输入时滞的非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) + 0.5 \cos(x_1(t)) [x_1(t)]^{\frac{11}{13}} \\ \dot{x}_2(t) &= u(t-\theta) + 0.2 [x_1(t)]^{\frac{9}{13}} + 0.3 [x_2(t)]^{\frac{9}{11}} \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (90)$$

根据定理 1 设计无记忆输出反馈控制器并选择仿真参数 $L = 2, T = 0.02, \alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 6, l_2 = 10$, 仿真结果如图 1 ~ 5 所示. 图 1 ~ 3 为开环系统的状态响应和闭环系统在不同输入时滞下的状态响应. 其中, 在输入时滞 $\theta = 0.02$ 时, $\sup|x_1| = 0.0117$, $\sup|x_2| = 0.2764$, 在输入时滞 $\theta = 0.04$ 时, $\sup|x_1| = 0.3007$, $\sup|x_2| = 4.1575$. 根据仿真可以看出, 所设计的控制器能够保证闭环系统的所有状态一致最终有界. 此外, 在采样周期相同的条件下, 输入时滞越大, 闭环系统状态的终端界也越大. 另一方面, 针对含有输入时滞的非线性系统, 文献 [20] 设计了无记忆线性反馈控制器, 当系统中含有低阶非线性项时, 控制器的控制性能会变差. 为进一步突出本文结果

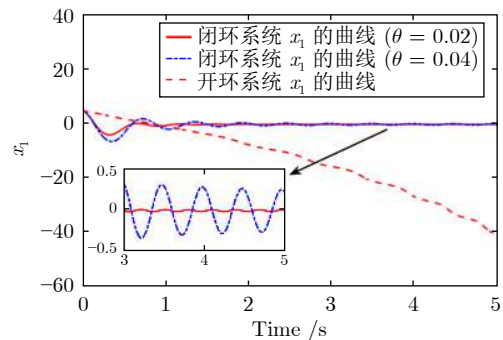


图 1 系统 (90) 中状态 x_1 的曲线

Fig.1 The curve of state x_1 in system (90)

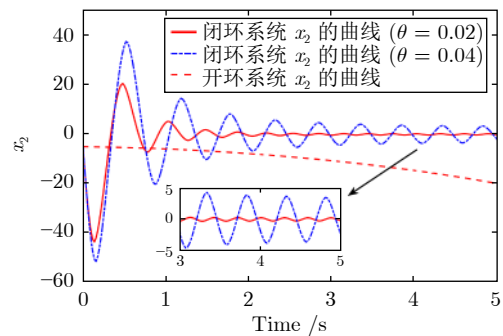


图 2 系统 (90) 中状态 x_2 的曲线

Fig.2 The curve of state x_2 in system (90)

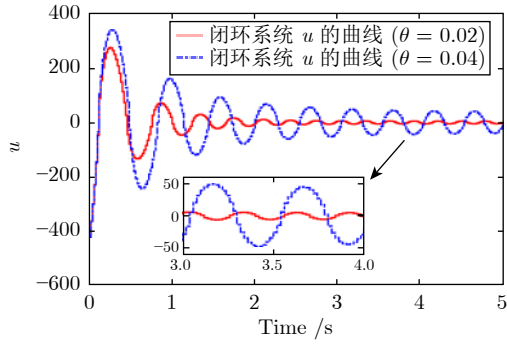


图 3 系统 (90) 中控制输入 u 的曲线

Fig.3 The curve of control input u in system (90)

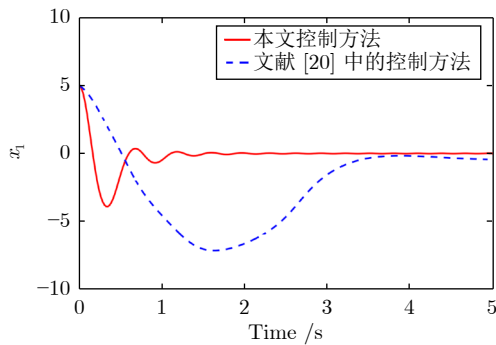


图 4 系统 (90) 中状态 x_1 在不同控制方法下的曲线

Fig.4 The curve of state x_1 in system (90) under different control methods

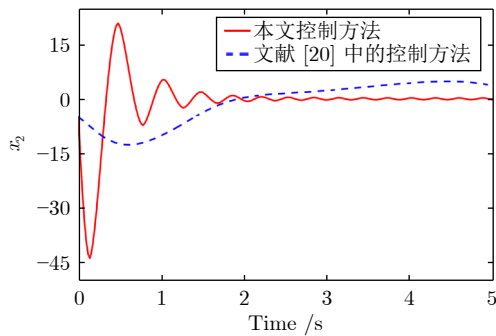


图 5 系统 (90) 中状态 x_2 在不同控制方法下的曲线

Fig.5 The curve of state x_2 in system (90) under different control methods

与现有文献的区别, 用本文方法与文献 [20] 中的方法分别设计控制器, 在输入时滞 $\theta = 0.02$ 的条件下进行仿真对比, 仿真结果如图 4 和图 5 所示. 图 4 为两种控制方法所得到的闭环系统状态 x_1 的响应曲线, 图 5 为两种控制方法所得到的闭环系统状态 x_2 的响应曲线. 从图 4 和图 5 可以看出, 对于输入时滞相同的控制系统, 本文设计的控制器能够获得更好的控制性能.

3.2 实例仿真

考虑如下质量-弹簧机械系统

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sd} = F_\theta \tag{91}$$

其中, F_f 为摩擦阻力, F_{sd} 为弹簧的恢复力, m 为质量, F_θ 为外部施加的力. 选择状态变量 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, u(t - \theta) = F_\theta, F_{sd} = [x_1(t - d)]^{\frac{5}{7}}, F_f = [x_2]^{\frac{5}{6}}, d$ 为状态时滞, θ 为输入时滞. 当选择 $m = 1$ 时, 系统 (91) 可以写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u(t - \theta) - [x_2]^{\frac{5}{6}} - [x_1(t - d)]^{\frac{5}{7}} \end{cases} \tag{92}$$

通过构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函抵消状态时滞的影响, 然后选择仿真参数 $L = 2.5, T = 0.02, \alpha_1 = 2.2, \alpha_2 = 6, l_2 = 13$, 仿真结果如图 6 ~ 10 所示. 图 6 ~ 8 为开环系统的状态响应和闭环系统在不同输入时滞下的状态响应. 其中, 在输入时滞 $\theta = 0.02$ 时, $\sup|x_1| = 0.0131, \sup|x_2| = 0.3861$, 在输入时滞 $\theta = 0.04$ 时, $\sup|x_1| = 0.2641, \sup|x_2| = 4.7915$. 根据仿真可以看出, 所设计的控制器能够保证闭环系统的所有状态一致最终有界. 此外, 在采样周期相同的条件下, 输入时滞越大, 闭环系统

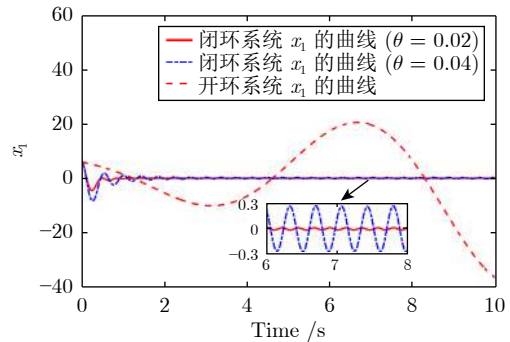


图 6 系统 (92) 中状态 x_1 的曲线

Fig.6 The curve of state x_1 in system (92)

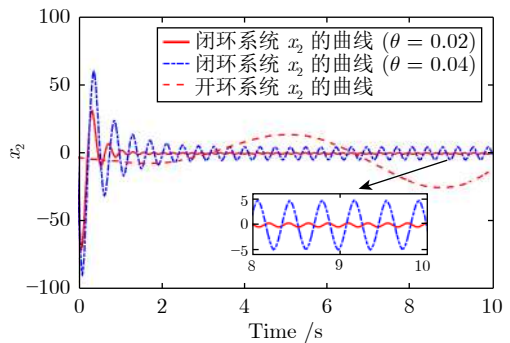
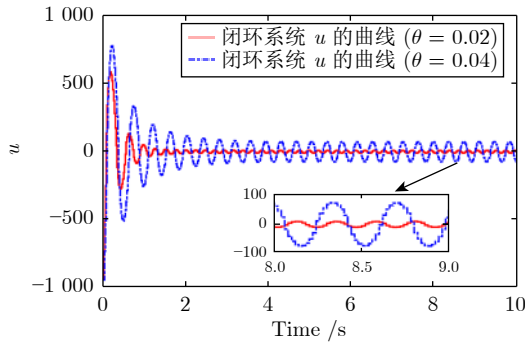
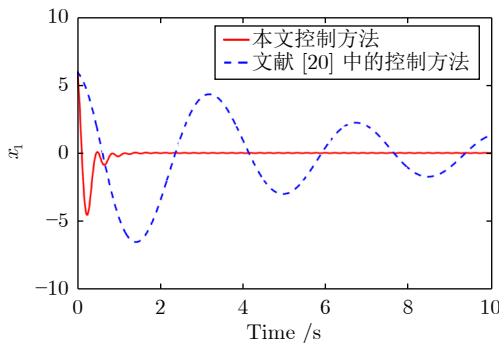
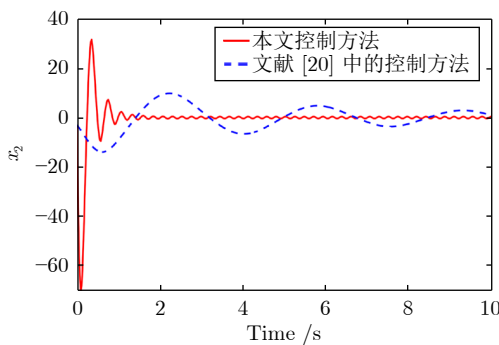


图 7 系统 (92) 中状态 x_2 的曲线

Fig.7 The curve of state x_2 in system (92)

图 8 系统 (92) 中控制输入 u 的曲线Fig.8 The curve of control input u in system (92)图 9 系统 (92) 中状态 x_1 在不同控制方法下的曲线Fig.9 The curve of state x_1 in system (92) under different control methods图 10 系统 (92) 中状态 x_2 在不同控制方法下的曲线Fig.10 The curve of state x_2 in system (92) under different control methods

状态的终端界也越大. 用本文方法与文献 [20] 中的方法分别设计控制器, 在输入时滞 $\theta = 0.02$ 的条件下进行仿真对比, 仿真结果如图 9 和图 10 所示. 图 9 为两种控制方法所得到的闭环系统状态 x_1 的响应曲线, 图 10 为两种控制方法所得到的闭环系统状态 x_2 的响应曲线. 从图 9 和图 10 可以看出, 对于输入时滞相同的控制系统, 本文设计的控制器能够获得更好的控制性能.

4 结束语

针对一类含有输入时滞和低阶非线性项的非线性系统, 研究了系统在齐次增长条件下无记忆输出反馈采样控制器的设计方法. 为了解决不可量测状态带来的困难, 利用系统输出在采样时刻的信息构造了降维观测器. 根据齐次系统理论和 Gronwall-Bellman 不等式, 给出了闭环系统稳定的条件, 保证了闭环系统的所有状态一致最终有界. 最后, 仿真结果验证了本文所提控制方法的有效性.

References

- 1 Wang Huan-Qing, Chen Ming, Liu Xiao-Ping. Fuzzy adaptive fixed-time quantized feedback control for a class of nonlinear systems. *Acta Automatica Sinica*, 2021, **47**(12): 2823–2830 (王焕清, 陈明, 刘晓平. 一类非线性系统模糊自适应固定时间量化反馈控制. *自动化学报*, 2021, **47**(12): 2823–2830)
- 2 Liu L, Chen A Q, Liu Y J. Adaptive fuzzy output-feedback control for switched uncertain nonlinear systems with full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(8): 7340–7351
- 3 Wang Q F, Zhang Z Q, Xie X J. Globally adaptive neural network tracking for uncertain output-feedback systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2023, **34**(2): 814–823
- 4 Qian C J, Lin W. Output feedback control of a class of nonlinear systems: A nonseparation principle paradigm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, **47**(10): 1710–1715
- 5 Yan X H, Liu Y G, Zheng W X. Global adaptive output-feedback stabilization for a class of uncertain nonlinear systems with unknown growth rate and unknown output function. *Automatica*, 2019, **104**: 173–181
- 6 Li H F, Zhang X F, Liu S. An improved dynamic gain method to global regulation of feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(6): 2981–2988
- 7 Xie X J, Duan N, Zhao C R. A combined homogeneous domination and sign function approach to output-feedback stabilization of stochastic high-order nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, **59**(5): 1303–1309
- 8 Zhang X H, Zhang K M, Xie X J. Finite-time output feedback stabilization of nonlinear high-order feedforward systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2016, **26**(8): 1794–1814
- 9 Liu Z G, Tian Y P, Sun Z Y. An adaptive homogeneous domination method to time-varying control of nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(1): 527–540
- 10 Zhai J Y, Liu C. Global dynamic output feedback stabilization for a class of high-order nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(3): 1828–1843
- 11 Xie X J, Wu Y, Hou Z G. Further results on adaptive practical tracking for high-order nonlinear systems with full-state constraints. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(10): 9978–9985
- 12 Lin X Z, Xue J L, Zheng E L, Park J H. State-feedback stabilization for high-order output-constrained switched nonlinear systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2022, **52**(12): 7401–7410
- 13 Liu Yu-Fa, Liu Yong-Hua, Su Chun-Yi, Lu Ren-Quan. Adaptive control for a class of high-order uncertain nonlinear systems with unknown powers. *Acta Automatica Sinica*, 2022, **48**(8): 2018–2027 (刘玉发, 刘勇华, 苏春翌, 鲁仁全. 一类具有未知幂次的高阶不确定

- 定非线性系统的自适应控制. 自动化学报, 2022, **48**(8): 2018–2027)
- 14 Huang Ya-Xin, Zhang Xing-Hui, Jiang Meng-Meng. Adaptive control for high-order nonlinear feedforward systems with input and state delays. *Acta Automatica Sinica*, 2017, **43**(7): 1273–1279
(黄亚欣, 张星慧, 蒋蒙蒙. 带有输入和状态时滞的高阶非线性前馈系统的自适应控制. 自动化学报, 2017, **43**(7): 1273–1279)
- 15 Krstic M. Input delay compensation for forward complete and strict-feedforward nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, **55**(2): 287–303
- 16 Karafyllis I. Stabilization by means of approximate predictors for systems with delayed input. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2011, **49**(3): 1100–1123
- 17 Mazenc F, Bliman P A. Backstepping design for time-delay nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, **51**(1): 149–154
- 18 Zhou B, Yang X F. Global stabilization of feedforward nonlinear time-delay systems by bounded controls. *Automatica*, 2018, **88**: 21–30
- 19 Zhang M X, Liu L L, Zhao C R. Memoryless output feedback control for a class of stochastic nonlinear systems with large delays in the state and input. *Systems and Control Letters*, 2023, **171**: Article No. 105431
- 20 Zhao C R, Lin W. Global stabilization by memoryless feedback for nonlinear systems with a limited input delay and large state delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021, **66**(8): 3702–3709
- 21 Meng Q T, Ma Q, Shi Y. Fixed-time stabilization for nonlinear systems with low-order and high-order nonlinearities via event-triggered control. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2022, **69**(7): 3006–3015
- 22 Du Hai-Bo, Li Shi-Hua, Qian Chun-Jiang, He Yi-Gang. Global stabilization of a class of inherently nonlinear systems under sampled-data control. *Acta Automatica Sinica*, 2014, **40**(2): 379–384
(都海波, 李世华, 钱春江, 何怡刚. 基于采样控制的一类本质非线性系统的全局镇定. 自动化学报, 2014, **40**(2): 379–384)
- 23 Nešić D, Teel A R, Kokotović P V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations. *Systems and Control Letters*, 1999, **38**(4–5): 259–270
- 24 Qian C J, Du H B. Global output feedback stabilization of a class of nonlinear systems via linear sampled-data control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(11): 2934–2939
- 25 Zhai J Y, Du H B, Fei S M. Global sampled-data output feedback stabilisation for a class of nonlinear systems with unknown output function. *International Journal of Control*, 2016, **89**(3): 469–480
- 26 Li Z J, Zhao J. Output feedback stabilization for a general class of nonlinear systems via sampled-data control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, **28**(7): 2853–

2867

- 27 Bacciotti A, Rosier L. *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. New York: Springer, 2001.
- 28 Hardy G H, Littlewood J E, Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- 29 Hermes H. Homogeneous coordinates and continuous asymptotically stabilizing feedback controls. *Differential Equations*. New York: Marcel Dekker, 1991. 249–260



马倩 南京理工大学自动化学院教授. 主要研究方向为时滞系统、多智能体系统和非线性系统的分析与控制. 本文通信作者.

E-mail: qianmashine@gmail.com

(MA Qian Professor at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. Her research interest covers analysis and control of time-delay systems, multi-agent systems, and nonlinear systems. Corresponding author of this paper.)



盛兆明 南京理工大学自动化学院博士研究生. 主要研究方向为非线性系统的分析与控制.

E-mail: kzzxtmcszm@163.com

(SHENG Zhao-Ming Ph.D. candidate at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers analysis and control of nonlinear systems.)



徐胜元 南京理工大学自动化学院教授. 主要研究方向为广义系统、时滞系统和非线性系统的分析与控制.

E-mail: syxu@njust.edu.cn

(XU Sheng-Yuan Professor at the School of Automation, Nanjing University of Science and Technology. His research interest covers analysis and control of singular systems, time-delay systems, and nonlinear systems.)