第 33 卷 第 2 期 自 动 化 学 报 Vol. 33, No. 2
2007 年 2 月 ACTA AUTOMATICA SINICA February, 2007

T-S 模糊系统稳定性的一个新的充分条件

张大庆 [1] 张庆灵 [1] 胡跃冰 [1]

摘 要 讨论了 T-S 模糊系统的二次稳定性问题. 得到了两个等价的基于线性矩阵不等式 (Linear matrix inequality, LMI) 和 Sum-of-squares (SOS) 的充分条件. 无论是在理论上, 还是在数值示例方面, 都表明文中结论放宽了已有的相关方面的结论, 降低了此类问题判别条件的保守性.

关键词 T-S 模糊系统, 二次稳定, 状态反馈, 线性矩阵不等式
中图分类号 TP13

A New Sufficient Condition on the Stability of T-S Fuzzy Systems

ZHANG Da-Qing[1] ZHANG Qing-Ling[1] HU Yue-Bing[1]

Abstract This paper considers the stability of T-S fuzzy systems. Two equvilent sufficient conditions, represented in terms of linear matrix inequality(LMI) and Sum-of-squares (SOS), are obtained. The theorems presented in this paper have less conservatism than the existing ones, as have been verified by both theoretic analysis and numerical example.

Key words T-S fuzzy systems, quadratic stability, state feedback, linear matrix inequality(LMI)

1 引言

T-S 模糊系统是由一组 IF-THEN 规则描述的非线性系统. 由于 T-S 模糊系统可以以任意精度逼近 R^n 中闭集上的连续函数, 人们可以利用线性系统的理论和方法研究可用 T-S 模糊系统表示的非线性系统. 因而 T-S 模糊控制已经成为应用极广的一种理论框架和控制方法.

关于 T-S 模糊系统的研究, 系统的稳定性问题一直是一个难点. 在已有的结论中需要提及的是近年来形成的一类基于 LMI 的判别 T-S 模糊系统为二次稳定的方法. Tanaka 等人 [1,2] 首先放宽了判别 T-S 模糊系统二次稳定的条件. 之后 Kim 等人 [3] 又通过引入松弛因子, 降低了文 [1,2,4] 中给出的判别条件的保守性. 最近, Liu[5,6] 改进了文 [3] 中的定理, 得到了保守性更小的判别 T-S 模糊系统为二次稳定的条件. 应该指出的是, 文 [5,6] 中所给出的条件是目前已知的判别此类问题保守性相对较低的条件.

本文也将讨论 T-S 模糊系统的二次稳定问题. 基于 S-procedure, 文中得到了全新的判别条件. 理论证明表明, 文中结论较文 [5,6] 中结论具有更小的保守性, 文 [5,6] 中相应结论是本文中结论的特例. 通过数值示例, 能够更直观地看出文中定理的优越性.

本文的具体内容如下：第 2 节介绍了文中涉及的定义及引理. 第 3 节给出了本文主要结论. 在第 4 节, 通过数值示例将文中结论与已知文献中相关结论进行了比较. 第 5 节对全文做了简要的总结.

收稿日期 2006-3-7 收修改稿日期 2006-7-18
Received March 7, 2006; in revised form July 18, 2006
国家自然科学基金 (60574011) 资助
Supported by National Natural Science Foundation of P. R. China (60574011)
1. 东北大学系统科学研究所 沈阳 110006
1. Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110006
DOI: 10.1360/ass-007-0222

2 定义与引理

在本文中将始终使用下列符号. R^n 表示 n 维欧氏空间. $R^{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 维实矩阵所构成的集合. 对于两个实对称矩阵 X 和 Y, $X\geq Y$ (相应地，$X>Y$) 表示 $X-Y$ 是半正定矩阵 (相应地, 正定矩阵). 对于某一给定的矩阵 $N\in R^{n\times n}$ 及向量子空间 $S\subset R^n$, 称 N 在 S 上是半正定的 (或正定的), 简记为 $N\geq 0$ on S (或 $N>0$ on S), 如果对于 $\forall \boldsymbol{x}\in S$, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{x}\geq 0$ (或 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}N\boldsymbol{x}>0$) 成立. 符号 I 表示适当维数的单位矩阵. 符号 $\mathrm{Im}(A)$ 表示矩阵 A 的列向量所形成的子空间.

我们考虑下列 T-S 模糊系统在 PDC 控制器 $\boldsymbol{u}=\sum_{i=1}^r F_i\boldsymbol{x}$ 的作用下的稳定性问题.

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^r\lambda_i(\xi)(A_i\boldsymbol{x}(t)+B_i\boldsymbol{u}(t))\\ \boldsymbol{y}(t)=\displaystyle\sum_{i=1}^r\lambda_i(\xi)(C_i\boldsymbol{x}(t))\end{cases}\tag{1}$$

其中, $\boldsymbol{x}(t)\in R^n$ 为状态变量. $\boldsymbol{y}(t)\in R^q$ 是系统的控制输出. $\boldsymbol{u}(t)\in R^p$ 是系统的控制输入. $A_i\in R^{n\times n}$, $B_i\in R^{n\times p}$, $C_i\in R^{q\times n}$. $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_p$ 为可测的前件变量. 这里, 假设前件变量与系统控制输入无关. 在下面的研究中, 我们始终假设 $\sum_{i=1}^r\lambda_i(\xi)=1$, $\lambda_i(\xi)\geq 0$, $i=1,2,\cdots,r$. 并且针对系统 (1) 构造矩阵 $Q=(Q_{ij})$, 其中 $Q_{ii}=A_iZ+ZA_i^{\mathrm{T}}+B_iM_i+M_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}$, $Q_{ji}^{\mathrm{T}}=Q_{ij}=\frac{1}{2}(A_iZ+ZA_i^{\mathrm{T}}+A_jZ+ZA_j^{\mathrm{T}}+B_iM_j+M_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_jM_i+M_i^{\mathrm{T}}B_j^{\mathrm{T}})$, $i,j=1,2,\cdots,r$, 其中 M_i, $i=1,2,\cdots,r$ 为维数相容的实矩阵. 如无特别说明, 则文中矩阵 Q 都具有上述的结构.

定义 1. T-S 模糊系统 (1) 是二次稳定的, 如果当控制输入 $\boldsymbol{u}(t)\equiv 0$ 时, 存在实数 $\alpha>0$ 与正定矩阵 P 使得 $\dot V(\boldsymbol{x}(t))\leq -\alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)$ 成立. 其中, $V(\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{x}(t)$.

为了放宽 T-S 模糊系统二次稳定性的判别条件, 我们需要下面的全块 S-procedure. 假设 S 为 R^n 中的子空间. $T\in R^{l\times n}$ 是行满秩矩阵. $U\subset R^{k\times l}$ 为由行满秩矩阵构成的一个紧集. 对于给定的 $U'\in U$, 定义子空间 $S_{U'}:=S\cap\ker(U'T)$ 及假设所有的子空间 $S_{U'}$ 在 S 中具有共同的补集 $S_0\in S$, 我们有下面的引理.

引理 1[7]. 条件 $\forall U'\in U$, $S_{U'}\cap S_0=\{0\}$, 并且 $N<0$ on $S_{U'}$ 成立, 当且仅当, 存在矩阵 V' 使得对于任意的 $U'\in U$, $N+T^{\mathrm{T}}V'T<0$ on S 和 $V'>0$ on $\ker(U')$ 成立.

本文中结论主要是与 [5] 中关于稳定性的结论进行比较. 为方便阅读, 我们将其以引理方式列在下面.

引理 2[5]. 如果存在矩阵 M_i, $i=1,2,\cdots,r$, Z, $Y=(Y_{ij})$, 满足 $Q_{ii}<Y_{ii}$, $Q_{ij}+Q_{ji}<Y_{ij}+Y_{ji}$, $Y<0$, 则 T-S 模糊系统 (1) 可被模糊控制输入 $\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^r\lambda_i(\xi(t))F_i\boldsymbol{x}(t)$ 镇定. 其中, Z 是对称正定矩阵, $Y_{ji}=Y_{ij}^{\mathrm{T}}$, $i,j=1,2,\cdots,r$, $F_i=M_iZ^{-1}$, $i=1,2,\cdots,r$.

3 放宽的 T-S 模糊系统二次稳定性的条件

定义集合 $\widetilde\Sigma:=\{\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)^{\mathrm{T}}:\sum_i\lambda_i=1,\lambda_k\geq 0,k=1,2,\cdots,r\}$, $\varLambda:=\{\varLambda':\varLambda'=\mathrm{diag}(\lambda\otimes I),\lambda\in\widetilde\Sigma\}$, $V:=\left\{V':V'^{\mathrm{T}}=V',V'>0\ \mathrm{on}\ker[I-\varLambda'],\varLambda'\in\varLambda\right\}$. 在本文的叙述中, 如不另加说明, 则认为变量 λ, $\varLambda'$ 与 V' 分

别属于上边的三个集合, 并且将矩阵 V' 做适当依维数分块为 $V'=\begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ V_2^{\mathrm{T}} & V_3 \end{bmatrix}$.

利用前面介绍的 S-procedure, 我们有下面的结论.

定理 1. T-S 模糊系统 (1) 是二次能镇定的, 如果存在正定矩阵 $Z\in R^{n\times n}$, 对称矩阵 $V'\in V$, 对称矩阵 $Y=(Y_{ij})_{r\times r}\in R^{rn\times rn}$ 和矩阵 $M_i\in R^{p\times n}$, $i=1,2,\cdots,r$, 使得矩阵不等式 $Q_{ii}\leq Y_{ii}, Q_{ij}+Q_{ji}\leq Y_{ij}+Y_{ji}, i,j=1,2,\cdots,r$ 以及

$$\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}V_3C & C^{\mathrm{T}}V_2 \\ V_2C & Y+V_1 \end{bmatrix}<0 \tag{2}$$

成立. 其中 $C=[\underbrace{I,I,\cdots,I}_{r}]^{\mathrm{T}}$. 并且状态反馈为 $\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iF_i\boldsymbol{x}, F_i=M_iZ^{-1}, i=1,2,\cdots,r$.

证明. 由不等式 (2) 知

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ \hline 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\left[\begin{array}{c|c} Y & 0 \\ \hline 0 & V' \end{array}\right]\begin{bmatrix} 0 & I \\ \hline 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix}<0 \tag{3}$$

成立. 令

$$N=\begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ S=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} 0 & I \\ \hline 0 & I \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_0=\mathrm{Im}\begin{bmatrix} I \\ \hline I \\ 0 \end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix} I & -\Lambda' \end{bmatrix},\ T=\left[\begin{array}{c|cc} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

则有 $S_{U'}:=\ker(U'T)\cap S=\mathrm{Im}([\ \Lambda'^{\mathrm{T}}\ \ |\ \ \Lambda'^{\mathrm{T}}\ \ I\ ]^{\mathrm{T}})$. 由 (3) 有 $N+T^{\mathrm{T}}V'T<0$ on S. 因此, 通过引理 1 知 $N<0$ on $S_{U'}$, 由此知 $\Lambda'Y\Lambda'<0$. 由定理条件中矩阵 Q 与矩阵 Y 的关系及 $\lambda_i\geq 0$, $i=1,2,\cdots,r$, 可知 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j(A_iZ+ZA_i^{\mathrm{T}}+B_iM_j+M_j^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}})\leq\Lambda'Y\Lambda'<0$. 在此矩阵不等式左右两边分别乘以矩阵 Z^{-1} 及 $(Z^{-1})^{\mathrm{T}}$, 得到 $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j\ \ P(A_i+B_iF_j)+(A_i+B_iF_j)^{\mathrm{T}}P\ \ <0$, 其中 $P=Z^{-1}, F_i=M_iP, i=1,2,\cdots,r$. 这里由 $Z>0$ 知 $P>0$.

另一方面, 令 $V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iF_i\boldsymbol{x}$. 则此 V 函数沿系统 (1) 的导数 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\Big[\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\lambda_i\lambda_j(P(A_i+B_iF_j)+(A_i+B_iF_j)^{\mathrm{T}}P)\Big]\boldsymbol{x}<0$. 因为 $\tilde{\Sigma}$ 为一有界闭集, 因此, 存在 $\alpha>0$, 使得 $\dot{V}(\boldsymbol{x})=<-\alpha\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$. 所以, 系统 (1) 在状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iF_i\boldsymbol{x}$ 的作用下是稳定的. □

命题 1. 引理 2 有解时定理 1 一定有解, 但反之不然.

定理 2. T-S 模糊系统 (1) 是二次能镇定的, 如果存在正定矩阵 $Z\in R^{n\times n}$, 对称矩阵 $V'\in V$ 和矩阵 $M_i\in R^{p\times n}$, $i=1,2,\cdots,r$, 使得下列矩阵不等式 $\begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}}V_3C & C^{\mathrm{T}}V_2 \\ V_2C & Q+V_1 \end{bmatrix}<0$ 成立. 其中 $C=[\underbrace{I,I,\cdots,I}_{r}]^{\mathrm{T}}$, 并且状态反馈为 $\boldsymbol{u}(t)=\sum_{i=1}^{r}\lambda_iF_i\boldsymbol{x}, F_i=M_iZ^{-1}, i=1,2,\cdots,r$.

证明. 证明过程与定理 1 类似, 限于篇幅, 在此省略. □

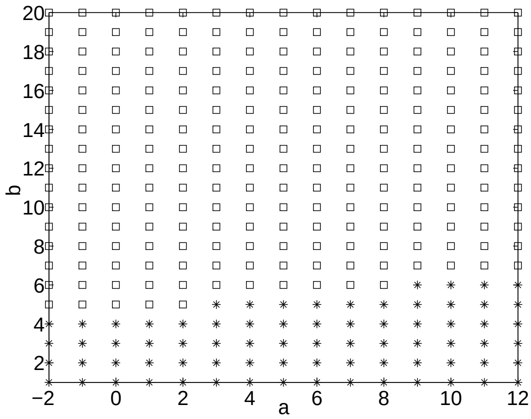

图 1　引理 2 能够判别系统为二次稳定的点

Fig. 1　The points at which the system can be determined to be stabilized by using Lemma 2

命题 2. 定理 1 与定理 2 是等价的.

注 1. 在 T-S 模糊系统的二次稳定问题的研究过程中, 文 [3] 通过引入松弛因子的方法改进了文 [1,2] 中得到的结论. 之后, 文 [5,6] 又将文 [3] 的判别条件进一步放宽. 在本文中定理 1 与定理 2 再次放宽了基于 LMI 的 T-S 模糊系统二次稳定判别条件. 但文中定理并不是改进已有的结论, 而是全新的判别条件. 其原因是, 文中的条件只要求定理 1 中矩阵 Y 或定理 2 中矩阵 Q 在隶属度函数形成的结合 $(\lambda_1I,\lambda_2I,\cdots,\lambda_rI)^{\mathrm{T}}$ 的像空间上是负定的. 在已有的文献, 如 [1~6] 及其参考文献中却没有这样的结论. 但由于 T-S 模糊系统本身为一非线性系统, 所以本文所提供的判别方法也是其系统为二次稳定的一个充分条件.

在给出算例之前, 需要讨论一下如何处理条件 $V'\in V$. 在本文中定理情形下, 令 $\boldsymbol{w}$ 为 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,r$ 的单项式构成的向量, $W=\boldsymbol{\omega}\otimes I$. 则有

命题 3[8]. 条件 $V'\in V$ 成立, 当且仅当存在矩阵 $Y_i\geq 0$, $i=1,2,\cdots,r+2$ 及 $\epsilon>0$ 使得 $\begin{bmatrix}\Lambda' \\ I\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}V'\begin{bmatrix}\Lambda' \\ I\end{bmatrix}-\sum_{i=1}^{r}W^{\mathrm{T}}Y_iW\lambda_i-W^{\mathrm{T}}Y_{r+1}W(\sum_{i=1}^{r}\lambda_i-1)-W^{\mathrm{T}}Y_{r+2}W(1-\sum_{i=1}^{r}\lambda_i)-\epsilon I$ 为 SOS 矩阵.

注 2. 命题 3 中 SOS 矩阵 $W^{\mathrm{T}}Y_iW, i=1,2,\cdots r+2$ 中的 多项式的幂次是有界的 [8]. 在通常情况下, 使用 2 次 SOS 矩阵就能达到良好的效果.

4　数值示例

假设模糊系统 (1) 具有如下系统矩阵. $A_1=\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 0.2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix} 0.2 & -5 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$, $B_2=\begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix} -8 & -a \\ 0 & 0.06 \end{bmatrix}$, $B_3=\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$. 图 1 和图 2 分别为引理 2 和定理 1 与定理 2 能够判别系统为能镇定的点. 这里令 a 和 b 分别取区间 $[-2\ \ 12]$, $[1\ \ 20]$ 上的整数, 以 $*$ 表示能够镇定的点, □ 表示不能够镇定的点. 从图中可以看到, 文中结

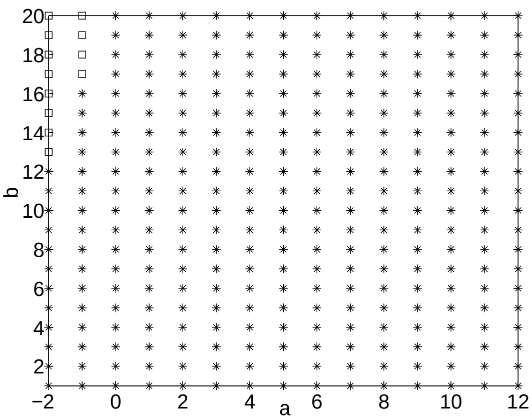

图 2 定理 1 和定理 2 能够判别系统为二次稳定的点
Fig. 2 The points at which the system can be determined to be stabilized through Theorem 1 and Theorem 2

论比已有的结论具有更小的保守性. 此算例中, 命题 3 中的单项式向量 $\boldsymbol{\omega} = (1\ \lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_r)^{\mathrm{T}}$.

5 结论

本文讨论了 T-S 模糊系统的二次稳定性问题. 得到了基于 LMI 和 SOS 矩阵的判别此类系统为二次稳定的条件. 理论分析与数值示例均表明, 文中的结论较已有的判别条件具有更低的保守性. 但文中定理也增加了求解问题时的计算量. 因此, 在处理实际系统时, 应该根据实际情况选择判别方法. 文中的算例是在 Matlab 环境下, 使用 Yalmip[9] 求解完成的.

References

1 Tanaka K, Ikede T, Wang H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability conditions and LMI-based design. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, **6**(2): 250∼256

2 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. A unified approach to controlling chaos via LMI-based fuzzy control system design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems–I: Fundamental Theory and Applications*, 1998, **45**(10): 1021∼1040

3 Kim E, Lee H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, **8**(5): 523∼534

4 Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Barcelona Spain: IEEE, 1997. 171∼176

5 Liu X D, Zhang Q L. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI. *Automatica*, 2003, **39**(9): 1571∼1582

6 Liu X D, Zhang Q L. Approaches to quadratic stability condition and H_∞ control designs for T-S fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2003, **11**(6): 830∼839

7 Scherer C W. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 2001, **37**(3): 361∼375

8 Scherer C W. Relaxations for robust linear matrix inequality problems with verifications for exactness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2005, **27**(2): 365∼395

9 Löfberg J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: Proceedings of the CACSD Conference. Taipei, 2004. [Online], available: http://control.ee.ethz.ch/~joloef/yalmip.php

张大庆 东北大学系统科学研究所博士研究生. 主要研究方向为模糊控制系统和鲁棒控制. E-mail: d.q.zhang@hotmail.com
(**ZHANG Da-Qing** Ph. D. candidate at the Institute of Systems Science, Northeastern University. His research interests include fuzzy control systems and robust control.)

张庆灵 东北大学理学院教授, 博士生导师, 院长. 主要研究方向为分散控制, 广义系统理论和鲁棒控制. 本文通信作者. E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn
(**ZHANG Qing-Ling** Professor and dean of College of Science, Northeastern University. His research interests include decentralized control, descriptor systems, and robust control. Corresponding author of this paper.)

胡跃冰 硕士，东北大学系统科学研究所. 研究兴趣有模糊控制、鲁棒控制和广义系统理论等.
(**HU Yue-Bing** M. S. at Institute of Systems Science, Northeastern University. Her research interests include fuzzy control, robust control, and singular systems theory.)